§ 3 : Fonctions usuelles

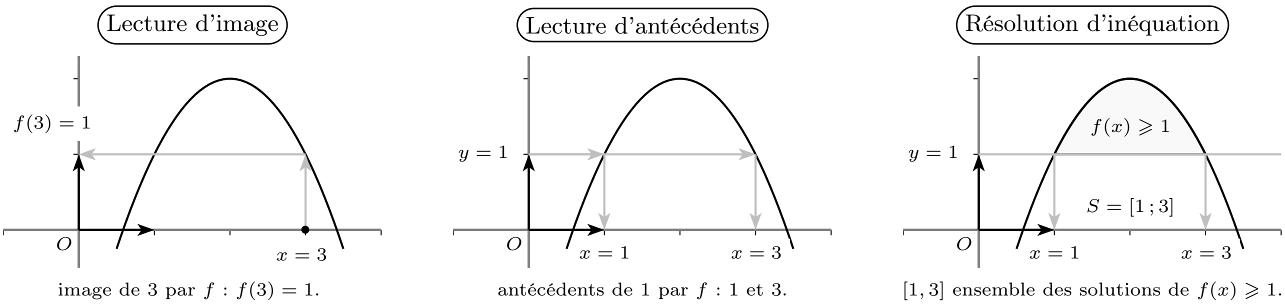
1. Propriétés des courbes

1.1 Définition et lecture graphique

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

> Définition 1. La *courbe* d'une fonction f définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan défini par $\mathcal{C}_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f(x)\}$.
> L'équation $y = f(x)$ est une *équation cartésienne* de la *courbe* de f.

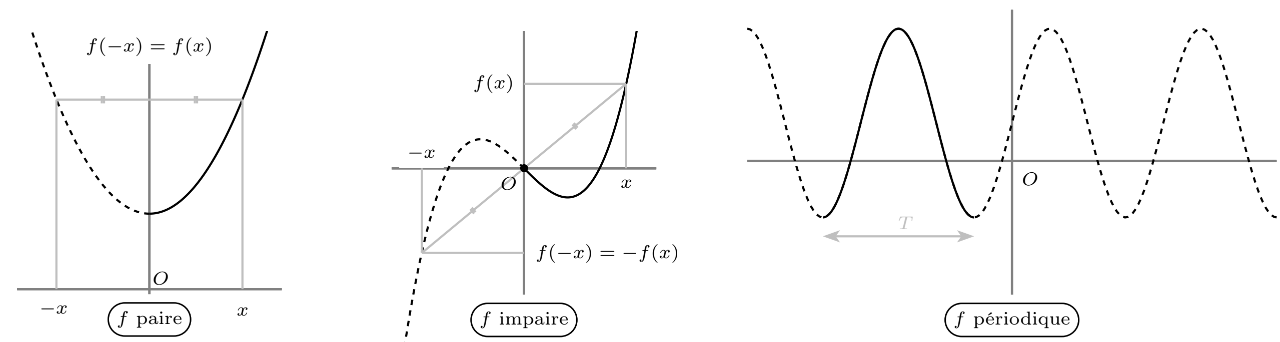
Exemple 1. Lecture graphique d'image et d'antécédents.



1.2 Parité et périodicité

L'étude des propriétés d'une fonction permet de restreindre son ensemble d'étude et de compléter sa courbe par translation ou symétrie.

> Définition 2. Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est
> - ⋆ *paire* si et seulement si : (a) $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$ (b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$.
> - ⋆ *impaire* si et seulement si : (a) $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$ (b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x)$.
> - ⋆ *T-périodique* (avec $T > 0$) si et seulement si : (a) $\forall x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D}$ (b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x + T) = f(x)$.



Exemple 2. ✎ Vérifier que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ est impaire

Proposition 1. Soit f définie sur $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

① f est paire si et seulement si $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

② f est impaire si et seulement si $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine.

③ f est T-périodique si et seulement si $\mathcal{C}$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}(T\,;0)$.

Démonstration. ✎ Prouver ① (M' symétrique de M par rapport à C si et seulement si C milieu de $[MM']$). □

Remarque 1. Plus généralement la courbe de la fonction f définie sur $\mathcal{D}$ admet

- ⋆ une symétrie de centre $I(a\,;b)$ si pour tout réel h tel que $a+h \in \mathcal{D}$, $a-h \in \mathcal{D}$ et $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.
- ⋆ une symétrie d'axe d'équation $x = a$ si pour tout réel h tel que $a+h \in \mathcal{D}$, $a-h \in \mathcal{D}$ et $f(a+h) = f(a-h)$.

1.3 Tangentes

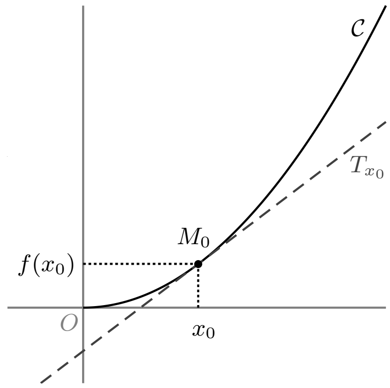
La dérivation sera étudiée au chapitre §11. Intuitivement, la tangente en un point M de la courbe $\mathcal{C}$ est la droite qui épouse au mieux l'allure de $\mathcal{C}$ au voisinage de M. Elle permet de guider le tracé de $\mathcal{C}$ près de M.

Définition 3. Le *nombre dérivé* $f'(x)$ d'une fonction f définie sur un intervalle I est la limite, lorsqu'elle existe, du taux d'accroissement de f en $x_0 \in I$: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ noté aussi $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

Définition 4. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ainsi, le coefficient directeur de cette tangente est nombre $f'(x_0)$.



Exemple 3. ✎ Équation de la tangente à $\mathcal{P} : y = x^2$ au point $A(1,1)$?

Remarque 2. Si la limite du taux d'accroissement en a est $\pm\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en a une tangente verticale d'équation $x = a$.

Exemple 4. ✎ Montrer que $\mathcal{C} : y = \sqrt{x}$ a une tangente verticale en O.

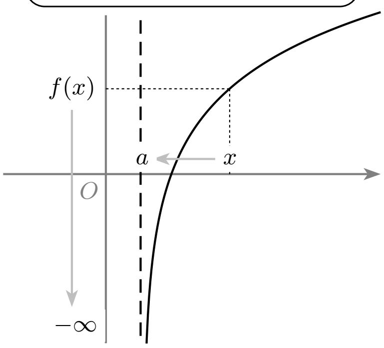
1.4 Asymptotes

Intuitivement, une *asymptote* à la courbe de f au voisinage d'une borne ouverte de son ensemble de définition, est une droite épouse au mieux l'allure de la courbe dans cette direction. Elle permet d'en guider le tracé.

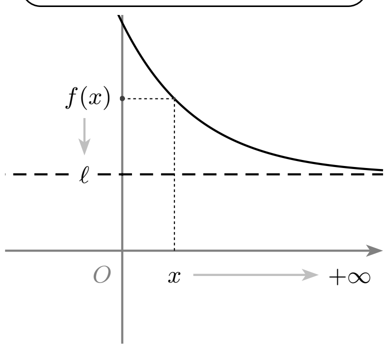
Définition 5. La courbe d'une fonction f admet

- ⋆ une *asymptote verticale* d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
- ⋆ une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \ (\in \mathbb{R})$
- ⋆ une *asymptote oblique* d'équation $y = ax+b$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \ \in \mathbb{R}$.

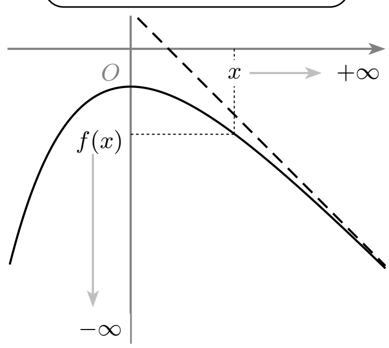
Asymptote verticale en $x = a$



Asymptote horizontale en $+\infty$



Asymptote oblique en $+\infty$



2. Dérivation

2.1 Opérations et dérivation

On montrera lors du chapitre §11 sur les limites :

Proposition 2.

Soient I et J deux intervalles, et u et v deux fonctions. Si

① $k \in \mathbb{R}$ et u est dérivable sur I, alors $k\,u$ aussi et $(k\,u)' = k\,u'$

② u et v sont dérivables sur I, alors $u+v$ aussi et $(u+v)' = u' + v'$

③ u et v sont dérivables sur I, alors uv aussi et $(uv)' = u'v + v'u$

④ u et v sont dérivables sur I, et v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

⑤ $u : I \to J$ dérivable et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \cdot v' \circ u$.

Exemple 5. ✎ Dériver les fonctions suivantes :
① $x \mapsto \dfrac{x+1}{3}$ ② $x \mapsto \tan(x)$ ③ $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ où $(\omega, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ ④ $x \mapsto \sin(x^2)$ ⑤ $x \mapsto x\ln(x)$

2.2 Application aux variations

On admet (en attendant le chapitre §11) le théorème suivant :

Théorème 3.

Soit f une fonction définie et continue sur un *intervalle* I. Si

- ⋆ f' est nulle sur l'intervalle I, alors f est constante sur I.
- ⋆ $f' > 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement croissante sur I.
- ⋆ $f' < 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque 3. Les deux derniers points restent vrais si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x.

3. Notion de continuité

3.1 Définition

La notion de limite utilisée ci-dessous sera précisée lors du chapitre §11 sur les limites.

Définition 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que la fonction f est *continue* en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est dite continue sur l'intervalle I lorsqu'elle est continue en tout réel a de I.

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 4. Cette définition traduit l'idée que la courbe de f n'admet pas de « saut », qu'elle peut être représentée sans lever le crayon. Cette remarque n'a rien de rigoureux et ne doit bien sûr pas être mentionnée dans la rédaction de la solution d'un problème !

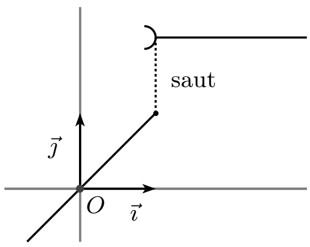
Proposition 4. $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \implies$ ① $u \pm v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ② $u \cdot v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ③ $\dfrac{u}{v} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ si $\forall x \in I,\ v(x) \neq 0$.

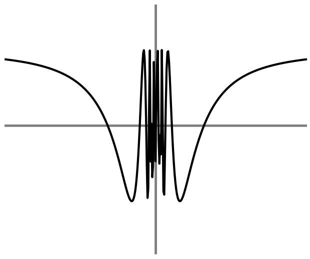
Proposition 5. Si $u \in \mathcal{C}(I, J)$ et $v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ alors $v \circ u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

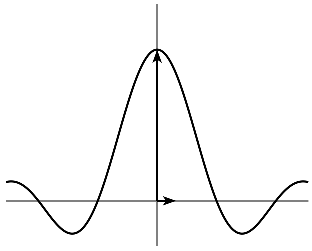
Remarque 5. Ce sont des conséquences des propriétés des limites. Elles impliquent la continuité sur leurs intervalles de définitions de la plupart des fonctions usuelles. Ainsi, la continuité des constantes et l'identité $x \mapsto x$ implique celle des polynômes et des fractions rationnelles.

Exemple 6. Trois exemples de discontinuités :

① discontinuité par « saut » ② : discontinuité « sauvage » ③ : discontinuité « artificielle »







$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \,]-\infty\,;1] \\ 2 & \text{si } x \in \,]1\,;+\infty[\end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

① $f(1) = 1$ mais $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ donc f n'est pas continue en 1.

② $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et cos n'a pas de limite en $+\infty$ donc g n'a pas de limite en 0 : g n'est pas continue en 0.

③ n'étant pas définie en 0, h n'est pas continue en 0. Mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, donc en définissant $\tilde{h}$ par $\tilde{h} = h$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\tilde{h}(0) = 1$, on obtient une fonction qui prolonge h par continuité.

3.2 Une fonction avec des discontinuités : la partie entière

Définition 7. La partie entière $\mathrm{E}(x)$ d'un réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

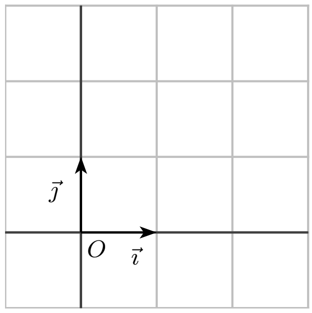
Exemple 7. Courbe et quelques valeurs :

① Calculer $\mathrm{E}(6)$, $\mathrm{E}(9{,}7)$, $\mathrm{E}(5/3)$, $\mathrm{E}(\pi)$, $\mathrm{E}(\mathrm{e})$, $\mathrm{E}(-1{,}2)$ et $\mathrm{E}(-\sqrt{8})$.

② Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction E est–elle continue sur $[n\,;n+1[$? En n ?

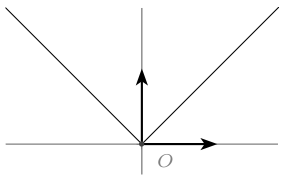
③ Résoudre $\mathrm{E}(x) = x$ puis $\mathrm{E}(x/2) = x/2$.

④ La fonction $v : x \mapsto \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2$ est-elle continue ?



3.3 Une fonction continue mais non dérivable en 0 : la valeur absolue

Définition 8. La *valeur absolue* d'un réel x est le nombre $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Remarque 6. Les propriétés algébriques de la valeur absolue sont les mêmes que celles du module d'un nombre complexe.

La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0 : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|}{h}$

3.4 Théorème des valeurs intermédiaires

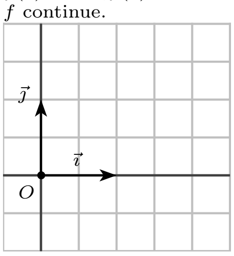
Le théorème ci-dessous permet de démontrer l'existence de solutions à une équation (sans trouver ces solutions). Il permet de répondre à des questions du type « Démontrer que l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution sur l'intervalle I ». On le démontrera au chapitre 7, sur les suites.

Théorème 6. « des valeurs intermédiaires »

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Si f et continue sur I et k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = k$ admet *au moins* une solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

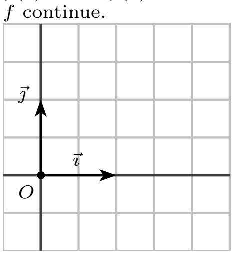
Exemple 8. Soit $f : [0;2] \to \mathbb{R}$. On considère l'équation $f(x) = 0$. Les deux premières figures sont dans le cadre du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), au contraire des trois autres.

Hypothèses du TVI
$f(0) = -1\,; f(2) = 1$
f continue.



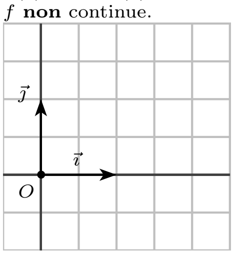
(1) 1 solution

Hypothèses du TVI
$f(0) = -1\,; f(2) = 1$
f continue.



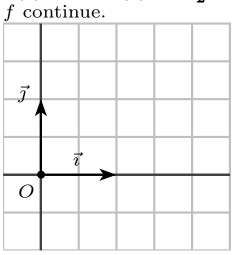
(2) 3 solutions

Hors TVI
$f(0) = -1\,; f(2) = 1$
f **non** continue.



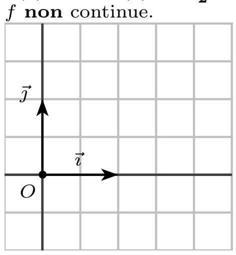
(3) 0 solution

Hors TVI
$f(0) = -1\,; f(2) = -\frac{1}{2}$
f continue.



(4) 0 solution

Hors TVI
$f(0) = -1\,; f(2) = -\frac{1}{2}$
f **non** continue.



(5) 1 solution

La figure **(2)** montre qu'il peut y exister plus d'une solution, les figures **(3)** et **(4)** illustrent l'intérêt de chacune des hypothèses alors que la figure **(5)** montre que le théorème n'a pas de réciproque : il peut exister une solution unique alors qu'aucune des hypothèses n'est satisfaite.

Exemple 9. Montrer que $\tan(x) = 1{,}5$ admet une solution au moins sur $[0; \frac{\pi}{3}]$.

3.5 Application aux inégalités et recherches de signes

Une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires est que si une fonction continue change de signe sur un intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle.

Méthode 1. Étude du signe d'une fonction compliquée

Lorsqu'on cherche le signe d'une fonction f dont on ne sait pas dresser le tableau de signes, on peut :

① étudier les variations de cette fonction f. (éventuellement en dérivant)

② chercher des solutions à $f(x) = 0$ et les reporter dans le tableau de variations.

③ en déduire le tableau de signes de f.

Remarque 7. La méthode précédente est importante. Elle peut s'appliquer :

- ⋆ lorsqu'on recherche le signe d'une dérivée.
- ⋆ lorsqu'on recherche la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. (on étudie le signe de $h = f - g$. La courbe de f est au dessus de celle de g lorsque $h > 0$).
- ⋆ lorsqu'on cherche à prouver une inégalité : $f \geqslant g \iff f - g \geqslant 0$: il suffit d'étudier le signe de $f - g$ et de trouver qu'il est positif.

Exemple 10. ✎ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$

3.6 Théorème de la bijection

Le théorème suivant donne l'existence et l'unicité d'une solution.

Théorème 7. « de la bijection »

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a, b \in I$. Si :
- ⋆ f et continue sur l'*intervalle* I,
- ⋆ f est strictement monotone sur I, (strictement croissante ou bien strictement décroissante)
- ⋆ et k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** dans l'intervalle $[a\,; b]$.
La fonction f réalise alors une bijection [(1)] strictement monotone de l'intervalle $[a\,; b]$ vers $[f(a)\,; f(b)]$

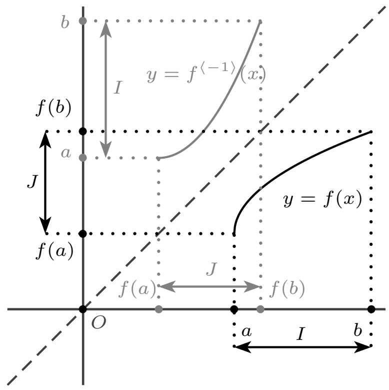
Démonstration. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet une solution α au moins. Si f est strictement croissante (le cas décroissant est identique), pour tous $x < \alpha < x'$, $f(x) < f(\alpha) = k < f(x')$ donc si $x \neq \alpha$ $f(x) \neq k$: la solution α est unique.

Remarque 8. Dans ces théorèmes, on peut remplacer l'intervalle $[a\,; b]$ par un intervalle ouvert ou semi-ouvert (par exemple $]2\,; +\infty[$) quitte à remplacer $f(a)$ et $f(b)$ par des limites (par exemple $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$)

Exemple 11. ✎ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'équation $x^n = y$ admet une solution unique.

(1). voir la définition 7 du §1 « Langage mathématique »

3.7 Application aux fonctions réciproques



Proposition 8.

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone [(2)] sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
La fonction f établit une bijection de $I = [a\,;b]$ sur $J = [f(a)\,;f(b)]$.
Sa fonction réciproque $f^{\langle -1 \rangle} : J \to I$ vérifie :

① $\forall x \in I,\ f^{\langle -1 \rangle} \circ f(x) = x$ et $\forall y \in J,\ f \circ f^{\langle -1 \rangle}(y) = y$.

② $f^{\langle -1 \rangle}$ est continue sur J.

③ $f^{\langle -1 \rangle}$ est strictement monotone, de même monotonie que f.

④ $f^{\langle -1 \rangle}$ est dérivable sur $J \setminus \{f(x),$ où $x \in I$ et $f'(x) = 0\}$.

Remarque 9. Comme pour le théorème de la bijection, ce résultat s'applique encore avec des intervalles ouverts ou semi-ouverts, quitte à remplacer $f(a)$ ou $f(b)$ par des limites.

$$\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & J \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \\ x = g(y) & \longleftarrow & y \end{array}$$

Remarque 10. $\mathcal{C}_{f^{\langle -1 \rangle}}$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie d'axe $y = x$: en effet, $M(x, f(x))$ a un symétrique de la forme $M'(f(x), x)$ donc $M'(X, g(X))$ en posant $X = f(x)$.

Méthode 2. Dériver une fonction réciproque

Pour déterminer la dérivée de de la fonction réciproque d'une bijection continue f d'un intervalle I sur un intervalle J, on dérive la fonction $h : J \to J,\ x \mapsto f \circ f^{\langle -1 \rangle}(x) = x$ de deux manières différentes.

Exemple 12. ✎ La fonction carrée $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc elle définit une bijection croissante de $[0; +\infty[$ vers $[0\,; \lim\limits_{x \to +\infty} x^2[= [0\,; +\infty[$.

On appelle racine carrée et on note $\sqrt{\ }$ sa bijection réciproque. Calculer la dérivée de la fonction racine.

3.8 Existence de primitives

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité d'un primitive vérifiant une condition initiale d'une fonction continue sur un intervalle. Il sera démontré au chapitre §13 « Intégration ».

Théorème 9. Existence de primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et y_0 un nombre réel. Il existe une unique fonction F définie et dérivable sur l'intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$ et $F' = f$, définie par :

$$F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction F est la *primitive* de f qui vaut y_0 en x_0.

Exemple 13. La fonction inverse $]0\,; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$, elle admet donc sur cet intervalle une unique primitive qui s'annule en $x = 1$. On appellera *logarithme néperien* cette primitive.

4. Fonctions rationnelles

4.1 Rappel sur les puissances

Définition 9. $\forall (a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, et $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$. Si $a \neq 0$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Dans l'écriture a^n, n est l'*exposant*.

(2). une fonction *monotone* est soit croissante, soit décroissante.

Proposition 10. Opérations avec un même nombre élevé à différentes puissances :

① $a^n a^m = a^{n+m}$ ② $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ③ $(a^n)^m = a^{nm}$ ④ $a^n \times b^n = (ab)^n$ ⑤ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

⚠ Si $a, b \neq 0$ et $n \geqslant 2$, $(a+b)^n \neq a^n + b^n$. On a en revanche les identités remarquables :

Proposition 11 (Identités remarquables). Pour tous réels a et b, et tout entier naturel n,

① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

② $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

③ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

④ $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

4.2 Fonctions polynomiales

Définition 10. Les fonctions *constantes* sont de la forme $x \mapsto a$ où $a \in \mathbb{R}$ fixé.

La fonction *identité* est la fonction $x \mapsto x$.

Les fonctions *monômes* sont des puissances entières de l'identité : $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions *polynomiales* sont les fonctions obtenues à partir des constantes et de l'identité et un nombre fini d'addition et de multiplications.

Elles s'écrivent $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Le plus grand exposant n des différents monômes est le *degré* du polynôme.

Proposition 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u la fonction monôme $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$.

① u est continue et indéfiniment dérivable ; $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = nx^{n-1}$ si $n > 0$ et $1' = 0$.

② si n est pair, u est une fonction paire, et si n est impair, u est une fonction impaire.

③ si n est paire, u est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, si n impaire, u est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

④ Variations et signe :

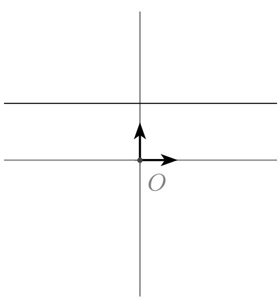
Cas pair : $n \in \mathbb{N}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{2n}	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
x^{2n}		$+$	0	$+$	

Cas impair : $n \in \mathbb{N}$

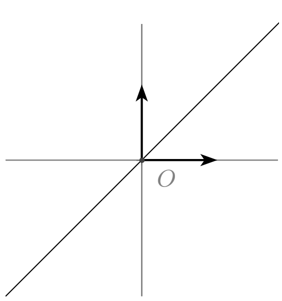
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{2n+1}	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
x^{2n+1}		$-$	0	$+$	

Constante $x \mapsto a$



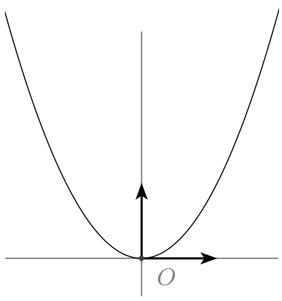
- ⋆ Paire.
- ⋆ Courbe : droite horizontale.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 0$.

Identité $x \mapsto x$



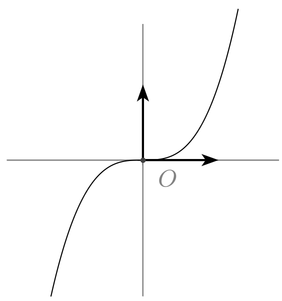
- ⋆ Impaire.
- ⋆ Courbe : droite linéaire.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 1$.

Carré $x \mapsto x^2$



- ⋆ Paire.
- ⋆ Courbe : parabole.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 2x$.

Cube $x \mapsto x^3$



- ⋆ Impaire.
- ⋆ Courbe : pas de nom.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 3x^2$.

4.3 Fonctions affines (polynômes de degré 1 ou 0)

Définition 11. Une *fonction affine* est une fonction de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés. Le nombre a est le *coefficient directeur* de f, le nombre b son *ordonnée à l'origine*.

Proposition 13. ⋆ La courbe représentative d'une fonction affine est une *droite affine*.

⋆ Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

⋆ Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

⋆ Si $a > 0$,

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-\infty$	0	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

⋆ si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+\infty$	0	$-\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Méthode 3. Obtenir l'équation réduite d'une droite.

On choisit deux points A et B de la droite, on calcule son coefficient directeur. L'ordonnée à l'origine b s'obtient en remplaçant a, x_A, y_A dans $y_A = ax_A + b$ et en résolvant.

4.4 Trinômes (polynômes de degré 2)

Définition 12. Une fonction *trinôme du second degré* à coefficients réels est une fonction de la forme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont fixés et $a \neq 0$. La courbe représentative d'un trinôme est une *parabole*.

Proposition 14. Le *discriminant* du trinôme p est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

⋆ si $\Delta > 0$, deux racines : $\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$. Factorisation : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

⋆ si $\Delta = 0$, une racine : $\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$. Factorisation : $a(x - x_0)^2$.

signe :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

⋆ si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine réelle et pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

signe :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

4.5 Fonction inverse

Définition 13. La fonction *inverse* est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

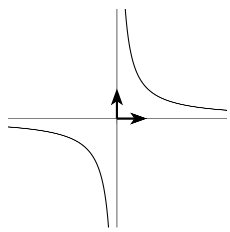
On appelle *fonction rationnelle* toute fonction qui s'écrit comme un nombre fini de sommes et de produits faisant intervenir l'identité, l'inverse et les constantes. Une fonction rationnelle s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômes.

Le quotient de deux fonctions affines est une *fonction homographique*. Elle est représentée par une *hyperboles* si son dénominateur est non constant et non proportionnel au numérateur.

Proposition 15. L'inverse est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Elle est impaire, représentée par une hyperbole, et de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$-\infty$	‖	$+\infty$	0
$\frac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	



Proposition 16 (« Plus haut degré »). Soient $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_m$ des réels, avec $a_n, b_m \neq 0$. Alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Démonstration. ✎ Factoriser numérateur et dénominateur par leur terme dominant. □

Exemple 14. ✎ ① $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 + 1$ ② $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-x}$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{1 + 2x^5}$ ④ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x}{x + 3}$

5. Radicaux

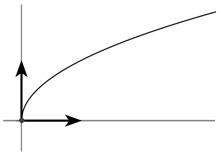
5.1 Fonction racine n-ième

Définition 14. Soit n un entier naturel non nul. La fonction $x \mapsto x^n$ établit une bijection de $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (si n impair) et de $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (si n pair). On note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ la bijection réciproque. On appelle racine n-ième de x le nombre $\sqrt[n]{x}$ (racine cubique si $n = 3$, et racine carrée si $n = 2$, encore notée : $\sqrt{x}$)

Proposition 17 (Cas n pair). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction racine n-ième est définie, continue et strictement croissante sur $\mathcal{D}_n$. Elle est dérivable sur $\mathcal{D}_n^*$. Sa courbe admet une tangente verticale à l'origine.

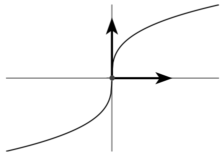
Cas n pair

x	0		$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	0	$+$	



Cas n impair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$		$-$	0	$+$	



Proposition 18. La fonction racine n-ième a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. Ainsi, $\forall x > 0,\ \dfrac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration. On dérive $h : x \mapsto (\sqrt[n]{x})^n$ de deux manières. □

Proposition 19. $\forall (n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{D}_n^2$: ① $\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$ ② $\sqrt[n]{a^n} = a$ ③ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ ④ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

Démonstration. On élève chaque membre de l'égalité à la puissance n, et on montre qu'ils sont égaux. On conclut sachant que $x \mapsto x^n$ est bijective sur D_n. □

Méthode 4. Quantité conjuguée

Pour lever une forme indéterminée avec une racine carrée, on peut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

6. Logarithmes

6.1 Définition du logarithme népérien

La continuité de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ garantit l'existence de ses primitives sur cet intervalle :

Définition 15. La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est la primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, qui s'annule en 1 :

$$\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Cette définition a pour conséquence immédiate :

Proposition 20.

① $\ln(1) = 0$

② ln est dérivable (et continue) sur $]0\,;+\infty[$. On a : $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

③ ln est strictement croissante : $\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$ et $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.

④ si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ sur I.

Exemple 15. ✎ Résoudre $\ln(2 - x^2) < 0$

Exemple 16. ✎ Calculer : ① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$. ② $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

6.2 Propriétés algébriques

Proposition 21.

Pour tous réels strictement positifs a et b, pour tout entier relatif n,

① $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

② $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

③ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

④ $\ln(a^n) = n\ln(a)$

⑤ $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Méthode 5. Démontrer une égalité en dérivant

Pour montrer l'égalité de deux expressions dépendant d'au moins une variable x, on peut :

① considérer la fonction qui à tout x d'un intervalle I associe la différence des deux expressions (les variables supplémentaires étant des paramètres).

② Montrer que la dérivée de cette fonction est nulle sur l'intervalle I.

③ Vérifier que la fonction s'annule pour une valeur de x.

La fonction considérée est donc constante, et nulle : les deux expressions sont égales.

Démonstration de la proposition 21. ✎ ♡ : le point ① s'obtient en étudiant pour tout $a > 0$ la fonction $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$ et en prouvant qu'il s'agit de la constante nulle. ☐

Méthode 6. Équations, inéquations d'inconnues en exposant.

Le point ④ de la propoistion 21 permet souvent de simplifier un problème dans lequel l'inconnue est en exposant : en appliquant le logarithme aux deux membres de l'égalité ou de l'inégalité, sous réserve de positivité, on fait « descendre » l'inconnue.

Exemple 17. Résoudre dans $\mathbb{N}$: $0{,}9^n < 0{,}25$

6.3 Étude de la fonction logarithme néperien

Théorème 22. Logarithme Néperien

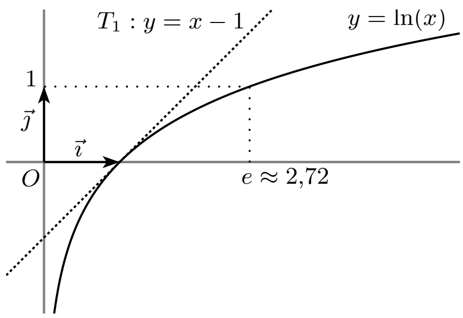
La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$:

① $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

② $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

③ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

x	0		1		$+\infty$
ln	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
ln	‖	$-$	0	$+$	



Démonstration. ③ : on doit prouver : $\forall A > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x > m,\ \ln(x) > A$.

Mais $\ln 2 > \ln 1 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \lim_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$, donc pour tout $A > 0$, il existe $n > 0$ tel que $\ln(2^n) > A$. Comme ln est strictement croissante, dès que $x > m = 2^n$, on a bien : $\ln(x) > A$. On note que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x) = \lim_{x\to 0} -\ln\frac{1}{x} = -\infty$ par composition. ☐

Remarque 11. La proposition 22 montre que la fonction logarithme néperien réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un réel unique, noté e, tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. On retiendra : $\mathrm{e} \approx 2{,}72$.

6.4 Croissances comparées et taux d'accroissement

Proposition 23. Croissances comparées

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ② $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 1)

Démonstration. ✎ ① peut se déduit de l'inégalité : $\forall x > 1,\ 0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, que l'on obtient en étudiant une fonction appropriée. La limite suivante s'obtient en posant $x = 1/X$.

③ : on exprime la dérivabilité en 1 : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ □

Remarque 12. Plus généralement : $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^n}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^m \ln(x)^n = 0$.

6.5 Logarithmes de base a

Définition 16. Si $a > 1$, *le logarithme de base a* est $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ pour $x > 0$.
On note en particulier $\log = \log_{10}$, que l'on appel logarithme décimal.

Remarque 13. Le logarithme de base $a > 1$ a les mêmes variations, limites, et propriétés ① à ③ de la proposition 21 que le logarithme néperien. On définit de même un logarithme de base $a \in]0\,;1[$, qui vérifie : $\log_a = -\log_{1/a}$.

Exemple 18. ✎ Calculer $\log(10^n)$, où $n \in \mathbb{Z}$ puis calculer $\log'$. L'avantage du logarithme décimal est qu'il se comporte bien avec les puissances de 10, son inconvénient est d'avoir une dérivée plus compliquée que celle de ln. Les mathématiciens préfèrent donc ln.

7. Fonctions exponentielles

7.1 Définition de l'exponentielle

Définition 17. La fonction exponentielle, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme néperien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

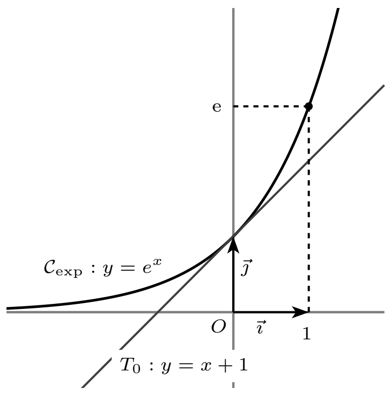
La définition implique immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 24. Exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.

① $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$.
② $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(x)) = x$
③ $\exp(0) = 1$
④ $\exp(1) = \mathrm{e}$
⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$
⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
⑦ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$
⑧ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$
⑨ $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, u dérivable sur I.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0	1	$+\infty$
exp′		$+$	



Démonstration. ✎ ⑧ est le seul point qui n'est pas une conséquence immédiate de la définition 17 et de la proposition 22. On dérive de deux manières différentes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\exp(x))$.

7.2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

Proposition 25.

Pour tous réels a et b, et tout entier relatif n,

① $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
② $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
③ $\sqrt{\exp(a)} = \exp(\frac{1}{2}a)$
④ $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
⑤ $\exp(a)^n = \exp(na)$

Démonstration. ✎ Pour chacune des égalités, on prouve que le logarithme du membre de droite égale le logarithme du membre de gauche, et on conclut du fait que le logarithme est une bijection. □

Remarque 14. Ces propriétés permettent de prouver que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $e^q = \exp(q)$. On définit alors les puissances irrationnelles de e par $e^x = \exp(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 26. Croissances comparées

① $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ② $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 0)

Démonstration. Poser $x = \ln(X)$, et utiliser la proposition 23. □

Remarque 15. Plus généralement, pour tout $\alpha > 0$ et $n > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$ $(n > 0)$.

7.3 Exponentielles de base a

En généralisant la remarque 14, on a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{Q},\ a^b = (e^{\ln(a)})^b = e^{b\ln(a)}$. Cela nous pousse à définir :

Définition 18. Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel b, on pose $\boxed{a^b = e^{b\ln(a)}}$

On appelle *exponentielle de base a* la fonction $x \mapsto a^x$.

Méthode 7. Exposant variable

Dès qu'on travaille avec une expression où l'exposant est variable ou irrationnel, on la transforme avec la définition 18. (valable pour les études de limites, fonctions, pour les résolutions d'équations, d'inéquations...)

Exemple 19. ✎ Étudier les fonctions suivantes : ① $x \mapsto x^\pi$ ② $x \mapsto 0{,}5^x$ ③ $x \mapsto x^x$

Remarque 16. On vérifie que l'exponentielle de base a est la bijection réciproque du logarithme de base a.

8. Fonctions circulaires

8.1 La fonction arc tangente

On peut définir la fonction arc tangente comme la réciproque, ou, et c'est le choix que l'on fait ici, comme une primitive d'une fraction rationnelle :

Définition 19. La fonction *arc tangente*, notée arctan est la primitive définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0, de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Ainsi : $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

On définit aussi le nombre π par $\pi = 4\arctan(1)$.

Lemme 27. On a : $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. Calculer $f(1)$ et f' puis conclure. $\square$

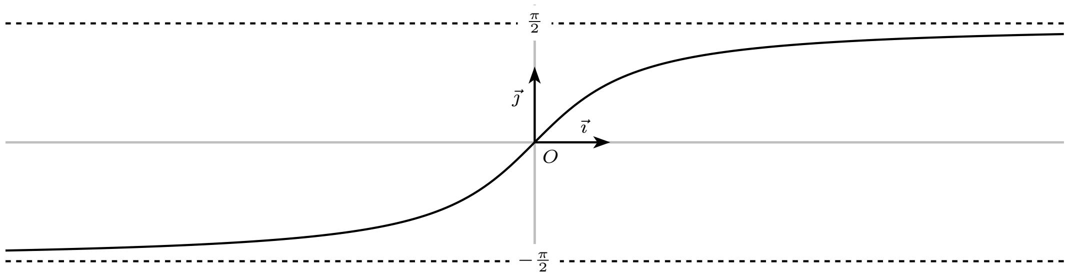
Proposition 28. Arc tangente

La fonction arc tangente est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Elle est impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
arctan	$-$	0	$+$

Démonstration. Pour l'imparité, étudier $h : x \mapsto -\arctan(-x)$. (voir aussi la définition 19 et le lemme 27) $\square$



Exemple 20. ✎ Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

8.2 Fonction tangente

La fonction arc tangente étant continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, elle est bijective et admet une bijection réciproque :

Définition 20. La fonction *tangente*, notée tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ par :

- ⋆ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, tangente est la bijection réciproque de arctan.
- ⋆ pour tous $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et $k \in \mathbb{Z}$: $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$

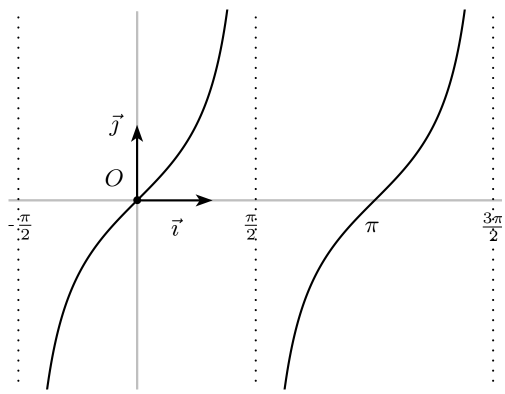
Exemple 21. ✎ Calculer $\tan\left(\arctan(\frac{\pi}{7})\right)$, $\tan 0$, $\tan\frac{\pi}{4}$, et $\arctan\left(\tan(\frac{5\pi}{4})\right)$.

Proposition 29. Tangente

La fonction tangente est définie, continue et (indéfiniment) dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Elle est impaire et π-périodique. $\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
tan	$\|\ -\infty$	0	$+\infty\ \|$
tan	$-$	0	$+$



Démonstration. Découle des propriétés de arctan. Pour $\tan'$, dériver de deux façons $\arctan \circ \tan$. $\square$

Proposition 30. Soient a et b réels avec a, b et $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}$

Démonstration. ✎ Soit $y > 0$. On pose $h :]-\infty\,;1/y[\longrightarrow \mathbb{R} \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
En dérivant, puis en calculant $h(0)$ on montre que $h(x) = \arctan(x) + \arctan(y)$.
En posant $x = \tan(a)$ et $y = \tan(b)$ puis en considérant $\tan(h(x))$, on obtient le résultat pour $\tan(a) < 1/\tan(b)$.
On le généralise en s'aidant de l'imparité et du lemme 27. □

8.3 Fonctions cosinus et sinus

> Définition 21. Les fonctions *cosinus* et *sinus*, respectivement notées cos et sin sont définies ainsi : pour tout réel $\theta \neq \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, on pose
>
> $$t = \tan\frac{\theta}{2} \quad ; \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$$
>
> On pose également $\cos(k\pi) = -1$ et $\sin(k\pi) = 0$.

Exemple 22. ✎ À partir de la proposition 30 et de la définition 21,
① $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ ② $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ③ $\sin' = \cos$ ④ $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ ⑤ $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
On peut aussi déduire les formules d'addition énoncées au §2 : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\ldots$

Proposition 31. Sinus

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1\,;1]$.
Elle est continue, impaire et 2π-périodique.

La fonction sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\sin' = \cos}$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0
sin	0	$+$	0	$-$	0

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés de la fonction tangente.

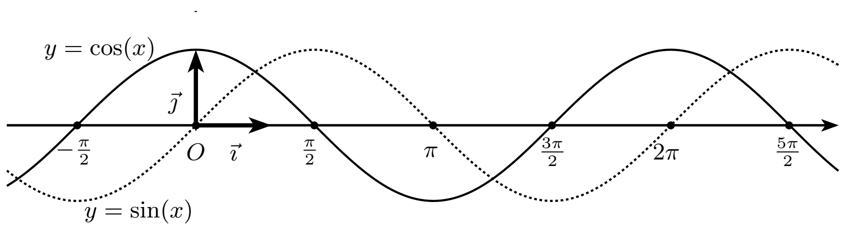
Proposition 32. Cosinus

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1\,;1]$.
Elle est continue, paire et 2π-périodique.

Elle est indéfiniment dérivable et $\boxed{\cos' = -\sin}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
cos		$+$	0		$-$		0	$+$	

Démonstration. même principe que pour la proposition 31. □



8.4 Fonction arc cosinus

D'après la proposition 32, la fonction cosinus est une bijection strictement décroissante de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$.

> Définition 22. La fonction *arc cosinus* : $\arccos : [-1\,;1] \to [0\,;\pi]$, est la bijection réciproque de la fonction cosinus $\cos : [0\,;\pi] \to [-1\,;1]$.

Proposition 33. Arc cosinus

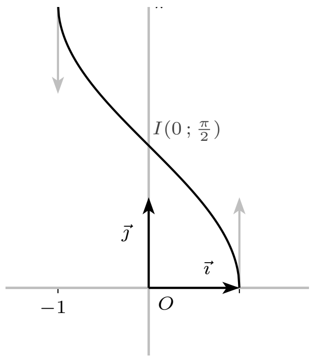
La fonction arc cosinus est définie, continue sur $[-1\,;1]$ à valeurs dans $[0\,;\pi]$.

Elle est dérivable sur $]-1\,;1[$, et

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[,\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

x	-1	1
arccos	$\pi \searrow 0$	
arccos	$+$	0

La courbe d'arc cosinus est symétrique par rapport à $I(0\,;\frac{\pi}{2})$ et admet deux tangentes verticales d'équations $x=-1$ et $x=1$.



Démonstration. ✎ Pour $\arccos'$, dériver $\cos\circ\arccos$. □

Remarque 17. ✎ pour $x\in[-1\,;1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. (utiliser $\cos^2+\sin^2=1$)

8.5 Fonction arc sinus

D'après la proposition 31, la fonction sinus est une bijection strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1\,;1]$.

Définition 23. La fonction *arc sinus* : $\arcsin : [-1\,;1] \to [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, est la bijection réciproque de la fonction sinus $\sin : [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}] \to [-1\,;1]$.

Proposition 34. Arc sinus

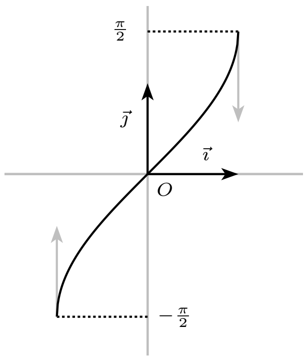
La fonction arc sinus est définie, continue sur $[-1\,;1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$.

Elle est dérivable sur $]-1\,;1[$, et

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

x	-1	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2} \nearrow 0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	
arccos	$-\ \ 0\ \ +$	

La fonction arc sinus est impaire, sa courbe admet deux tangentes verticales d'équations $x=-1$ et $x=1$.

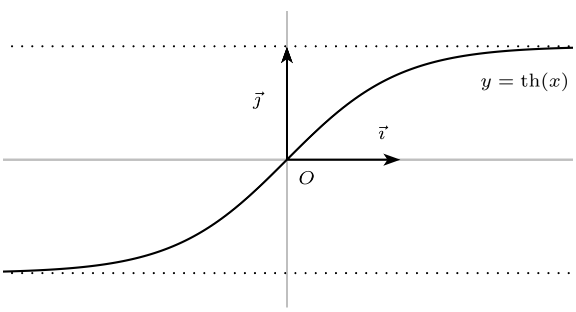


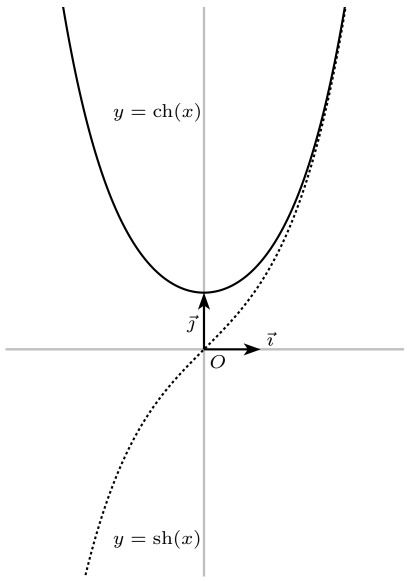
9. Fonctions hyperboliques

9.1 Définition des fonctions hyperboliques

Définition 24. On définit les fonctions

- ⋆ *cosinus hyperbolique* : $\mathrm{ch} : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
- ⋆ *sinus hyperbolique* : $\mathrm{sh} : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
- ⋆ *tangente hyperbolique* : $\mathrm{th} : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$





9.2 Étude des fonctions hyperboliques

Les études suivantes se réalisent en revenant à la définition 24

Proposition 35. Cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est paire.

Elle est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\mathrm{ch}' = +\,\mathrm{sh}}$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
ch			$+$		

Proposition 36. Sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est impaire.

Elle est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}}$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
sh		$-$	0	$+$	

Proposition 37. Tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est impaire.
Elle est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a : $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.
On a aussi : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = +1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	↗	0	↗	1
th		$-$	0	$+$	

Remarque 18. En revenant aux définitions, on peut obtenir des formules de trigonométrie hyperbolique. Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

10. Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction dérivable :

① *Ensemble de définition* $\mathcal{D}$: on le recherche s'il n'est pas donné dans l'énoncé.
- ⋆ on trouve les valeurs interdites venant des quotients en résolvant : « dénominateur = 0 »
- ⋆ les compositions $\ln(u)$, $\sqrt{u}$, $\arcsin(u)$, $\arccos(u)$ sont définies sur l'ensemble des solutions de $u(x) > 0$, $u(x) \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant u(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant u(x) \leqslant \pi$.

② *Périodicité, parité* :
- ⋆ on recherche une périodicité éventuelle (et, dans ce cas on restreint l'ensemble d'étude à une période).
- ⋆ on recherche la parité, qui permet de restreindre l'ensemble d'étude aux réels positifs de $\mathcal{D}$.

③ *Variations* : on étudie l'ensemble de dérivabilité puis la dérivée pour obtenir les variations et les extrema (qui correspondent à des tangentes horizontales). Si le signe de la dérivée est compliqué à obtenir, on peut envisager d'étudier les variations de la dérivée afin d'obtenir son signe.

④ *Limites* : on calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

⑤ *Asymptotes et branches paraboliques* aux bornes a de l'ensemble de définition.
- ⋆ si $m \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to m} f(x) = \pm\infty$: asymptote verticale d'équation $x = m$.
- ⋆ si $m = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to m} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$: asymptote horizontale d'équation $y = \ell$
- ⋆ si $m = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to m} f(x) = \pm\infty$: $\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{x\to m} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty : \text{branche parabolique de direction } (Oy). \\ \text{si } \lim\limits_{x\to m} \dfrac{f(x)}{x} = 0 : \text{branche parabolique de direction } (Ox). \\ \text{si } \lim\limits_{x\to m} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} : \text{branche parabolique de direction } y = ax. \\ -\text{ si de plus } \lim\limits_{x\to m} f(x) - ax = b \in \mathbb{R} : \text{asymptote } y = ax + b. \end{cases}$

⑥ *Courbe* : on trace les tangentes que l'on a calculées (horizontales et verticales), les asymptotes, et on représente la courbe de manière cohérente avec l'étude.

TD §3

Études de fonctions

Exercice 1. Étude de fonctions simples
Étudier et construire la courbe de :
① $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$ ② $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \dfrac{1}{2}$ ③ $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$ ④ $x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 - 9x$ ⑤ $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2. Étude d'une fonction et de sa réciproque
Étudier la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$ et représenter sa courbe dans un repère orthonormé.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa réciproque $f^{\langle -1 \rangle}$.

Représenter la courbe de la fonction réciproque dans le même repère.

Exercice 3. Fonction non croissante de limite infinie en l'infini
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\sin(x) + x$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

① Étudier f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

② Montrer que f est impaire et que $\mathcal{C}$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\,;2\pi)$.

③ Représenter $\mathcal{C}$ sur $[-\pi\,;5\pi]$.

④ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 4. Une fonction irrationnelle
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

① Montrer la relation $(\mathcal{R})$: pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1 \qquad (\mathcal{R})$.

② Calculer la limite de f en $-\infty$. Déduire de $(\mathcal{R})$ la limite de f en $+\infty$. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.

③ Dresser le tableau de variations de f.

④ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer l'équation réduite de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

⑤ Déterminer la position relative de T_0 avec $\mathcal{C}$.

⑥ Exprimer en fonction du réel $a > 0$ les coordonnées du point d'intersection J_a de T_a et T_{-a}.
Montrer que l'ensemble des points J_a est le segment $]OJ[$, où $J(0\,;1)$.

⑦ Représenter T_0, les asymptotes de $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$ elle-même.

Exercice 5. Étude de fonctions circulaires et réciproques
Étudier l'application : ① $x \mapsto \cos^2(x) + \cos(x)$ ② $x \mapsto \arccos(\cos(x))$ ③ $x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \arcsin(\sin(x))$

Égalités et inégalités

Exercice 6. Valeurs de fonctions circulaires et de leurs réciproques
Calculer : ① $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ ② $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ ③ $\sin\arcsin(-0{,}7)$ ④ $\arctan(\sqrt{3})$

Exercice 7. Somme télescopique et arctan ATS 2008

① Montrer que pour tout entier naturel k, $\arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+k+k^2}\right)$.

② En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Exercice 8. Égalité avec la fonction arc tangente
Montrer que : $\arctan(7) + 2\arctan(3) = \dfrac{5\pi}{4}$

Exercice 9. Égalité et fonctions circulaires réciproques

① Domaines de définition et de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \arctan(\mathrm{sh}x) + \arccos(\mathrm{th}x)$.

② Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (1-\text{th}^2(x))^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$.

③ Résoudre l'équation $\text{th}(x) = \dfrac{5}{13}$.

④ En déduire que $\arctan\left(\dfrac{5}{12}\right) + \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 10. Simplifier en dérivant
En reconnaissant sa dérivée, simplifier l'expression de la fonction :
① $x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ ② $x \mapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(\text{sh}(x))$ ③ $x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$

Exercice 11. Trigonométrie hyperbolique
Démontrer : ① $\forall a \in \mathbb{R},\ \text{sh}(2a) = 2\text{ch}(a)\text{sh}(a)$ ② $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(\text{b}) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$

Exercice 12. Sommes de référence
Simplifier : ① $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{ch}(kx)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. ② $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{sh}(kx)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Récurrences
Démontrer par récurrence : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k a) = \frac{\sin(2^n a)}{2^n \sin(a)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 14. Inégalité
Démontrer : ① $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$ ② $\forall x \in]0\,;1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$ ③ $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$

Autres

Exercice 15. Équation
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
① $\ln\left(\dfrac{x+3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3))$ ② $\arccos(x) = \arcsin(x)$ ③ $\text{ch}(x) = 2$ ④ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ ⑤ $2^{x^3} = 3^{x^2}$
⑥ $\arccos(x) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

Exercice 16. Dériver
Étudier le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de : ① $x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ② $x \mapsto \arcsin(\text{th}(x))$

Exercice 17. Limites et croissances comparées
Calculer : ① $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^3+1)\mathrm{e}^{-x}$ ② $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{3x}}{x+1}$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ④ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Défis

Exercice 18. Équation fonctionnelle d'une constante
Soit f une fonction continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x)$. Démontrer que f est constante.

Exercice 19. Signe d'une fonction continue sans zéro
Soit f une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle I. Démontrer (par l'absurde) que f est de signe constant.

Bilan §3

Prérequis

- ⋆ §1 les sections 2.2 (égalité) et 3.3 (équation) .... ☐
- ⋆ §2 section 7 : les formules trigonométriques (surtout les propositions 21 à 24) .... ☐

Objectifs prioritaires

① savoir prouver qu'une fonction est paire, impaire ou périodique (définition 2) .... ☐

② savoir déterminer les asymptotes d'une courbe (section 1.4) .... ☐

③ savoir dériver et utiliser la dérivée .... ☐

- (a) connaître les formules de dérivation (proposition 2) .... ☐
- (b) savoir calculer les dérivées dans les exercices 1, 5 et 16 .... ☐
- (c) savoir trouver une équation de tangente (section 1.3, exercice 4) .... ☐
- (d) démontrer une égalité en dérivant (méthode 5, exercice 10) .... ☐
- (e) démontrer une inégalité, étudier un signe en dérivant (méthode 1, exo 14) .... ☐

④ savoir appliquer le théorème de la bijection (7) .... ☐

⑤ Tout savoir sur les polynômes et la fractions rationnelles (section 4) .... ☐

⑥ Tout savoir sur les logarithmes (section 6) .... ☐

⑦ Tout savoir sur les exponentielles (section 7 et la formule de la section 7.3) .... ☐

⑧ Tout savoir sur les fonctions circulaires et leurs réciproques (section 8) .... ☐

- (a) savoir refaire les exercices 6 et 10 .... ☐

⑨ Tout savoir sur les fonctions hyperboliques (section 9) .... ☐

- (a) savoir refaire les exercices 11 et 12 .... ☐

⑩ connaître le plan d'étude d'une fonction (section 10) .... ☐

Objectifs secondaires

① comprendre la notion générale de réciproque (section 3.7, exercice 2) .... ☐

② connaître le théorème d'existence de primitive (section 3.8) .... ☐

③ connaître les fonction irrationnels (avec radicaux) section 5 .... ☐

Approfondissement

① savoir reconnaître un centre ou axe de symétrie général (section 1.2) .... ☐

② maîtriser les fonctions rares « partie entière (3.2) » et « valeur absolue (3.3) » .... ☐