# § 24 : Espaces vectoriels euclidiens

## 1. Espace euclidien

### 1.1 Produit scalaire et norme

Définition 1. Soit $E$ un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Un *produit scalaire* sur $E$ est une application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ⋆ bilinéarité : $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall(u, v, w) \in E^3,\ \langle\lambda u + v|w\rangle = \lambda\langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$ et $\langle w|\lambda u + v\rangle = \lambda\langle w|u\rangle + \langle w|v\rangle$.
- ⋆ symétrie : $\forall(u, v) \in E^2,\ \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle$.
- ⋆ positivité : $\forall u \in E,\ \langle u|u\rangle \geqslant 0$.
- ⋆ caractère défini : $\langle u|u\rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est un *espace euclidien.*

Si $u \in E$, le nombre $\|u\| = \sqrt{\langle u\,;u\rangle}$ est la *norme* du vecteur $u$.

Deux vecteurs $u$ et $v$ de $E$ sont *orthogonaux* ($u \perp v$) si et seulement si $\langle u|v\rangle = 0$

Exemple 1. Un produit scalaire : $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \big(U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,; V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\big) \mapsto \langle U|V\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$.

On note que $\langle U|V\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = (u_1, \dots, u_n)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}UV$ où $u = \begin{pmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$.

Exemple 2. L'application $\varphi$ suivante définit un produit scalaire sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$–périodiques :

$$\varphi : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R},\ \big(f\,; g\big) \mapsto \varphi(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 3. ✎ Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que l'application suivante est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\psi_n : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R},\ (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

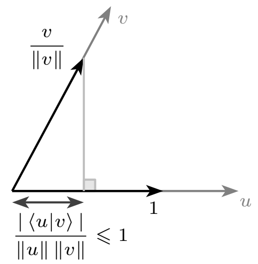
Dans $\mathbb{R}_3[X]$ : calculer $\|1 + X\|$ et trouver l'ensemble des polynômes orthogonaux à $1 + X$.

**Proposition 1. Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient un $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et $u, v$ des vecteurs de $E$.

$$\forall(u, v) \in E \times E,\ \langle u|v\rangle^2 \leqslant \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle \text{ ou : } \big|\langle u|v\rangle\big| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

On a égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.




*Démonstration.* ✎ Développer le polynôme en $t$ : $\langle tu|v\rangle^2$, puis traduire en une égalité sur son discriminant le fait qu'il est positif. Le cas d'égalité traduit le fait que le discriminant est nul. □

**Proposition 2. Inégalité triangulaire**

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et $u$ et $v$ deux vecteurs de $E$.

$$\forall(u, v) \in E^2,\ \big|\|u\| - \|v\|\big| \leqslant \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

*Démonstration.* Par bilinéarité, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u|v\rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$(\|u\| - \|v\|)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| \leqslant \|u + v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$.
On prend alors la racine carrée des deux extrémités et du membre central. □

**Proposition 3. Pythagore**

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Alors on a : $u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

*Démonstration.* ✎ Repose sur la bilinéarité du produit scalaire. □

### 1.2 Projection orthogonale

**Proposition 4. Sous-espace orthogonal**

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors

$$F^\perp = \{x \in E,\ \forall u \in F,\ \langle x|u\rangle = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $E$ appelé *sous-espace orthogonal* à $F$.
C'est un sous-espace supplémentaire de $F$ : $F \oplus F^\perp = E$.

*Démonstration.* $\forall u \in F,\ \langle 0|u\rangle = 0$, de sorte que $0 \in F^\perp$ : cet ensemble est non vide.
Par bilinéarité du produit scalaire,
$\forall (x,y) \in F^\perp \times F^\perp,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in F,\ \langle \lambda x + y|u\rangle = \lambda\langle x|u\rangle + \langle y|u\rangle = \lambda 0 + 0 = 0$ donc $\lambda x + y \in F^\perp$.
$F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de $E$.
Si $x \in F \cap F^\perp$ alors $\langle x|x\rangle = 0$ de sorte que $x = 0$ : $F \cap F^\perp = \{0\}$.
Or, par la formule de Grassmann, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ donc finalement : $F \oplus F^\perp = E$. □

Définition 2. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. La *projection orthogonale* sur $F$ est la projection sur $F$ parallèlement à $F^\perp$ :

$$\mathrm{proj}_F : E = F \oplus F^\perp \longrightarrow F,\ x = x_F + x_{F^\perp} \mapsto x_F$$

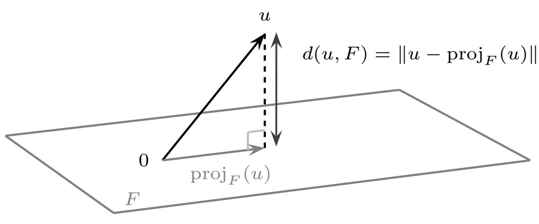
On appelle de même l'endomorphisme défini identiquement, mais d'espace d'arrivé $E$.

Remarque 1. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $u \in E \neq 0$. La projection orthogonale sur la droite vectorielle $\mathbb{R}u$ est l'application :

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{R}u} : E \longrightarrow F,\ x \mapsto \frac{\langle u|x\rangle}{\|u\|^2} u$$

Définition 3. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien.
La *distance entre les vecteurs $u$ et $v$* est $d(u,v) = \|u - v\|$.
La *distance entre un vecteur $u$ de $E$* et un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est le nombre défini par :

$$d(u,F) = \|u - \mathrm{proj}_F(u)\|$$




Remarque 2. Par l'inégalité triangulaire, on a : $\forall v \in F,\ d(u,F) \leqslant d(u,v) = \|u - v\|$ avec égalité si et seulement si $v = \mathrm{proj}_F(u)$.

Exemple 4. ✎ Déterminer $a$ et $b$ de sorte que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\, \mathrm{d}x$ soit minimale.

### 1.3 Base orthonormale

Définition 4. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Une famille $\{u_i\}$ de vecteurs non nuls de $E$ est *orthogonale* si et seulement si elle est composée de vecteurs deux à deux orthogonaux : $\forall i \neq j,\ u_i \perp u_j$.

**Proposition 5.**

Une famille orthogonale d'un espace vectoriel euclidien est une famille libre.
En particulier, une famille orthogonale de $n$ vecteurs d'un espace euclidien de dimension $n$ est une base.

*Démonstration.* Supposons que $\mathcal{F} = \{u_i\}$ est une famille orthogonale et $\sum \alpha_i u_i$ une combinaison nulle de $\mathcal{F}$. En prenant le produit scalaire de l'équation avec $u_j$, et en tenant compte de $\forall i \neq j,\ \langle u_i | u_j \rangle = 0$, on a :

$$\forall j,\ 0 = \left\langle \sum \alpha_i u_i \middle| u_j \right\rangle = \sum \alpha_i \langle u_i | u_j \rangle = \alpha_j \|u_j\|^2 \text{ donc } \alpha_j = 0 \text{ car } u_j \neq 0.$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre. □

Définition 5. Une base d'un espace vectoriel euclidien est *orthogonale* si c'est une base formée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Une base d'un espace vectoriel euclidien est *orthonormale* ou *orthonormée* si c'est une base orthogonale formée de vecteurs unitaires (tous de norme 1).

Remarque 3. Soit $\mathcal{B} = (e_i)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien. Si $x_i$ est la coordonnée de $x \in E$ suivant $e_i$, alors : $x_i = \langle x | e_i \rangle$.

# 2. Groupe orthogonal

## 2.1 Définition du groupe orthogonal d'un espace euclidien

Définition 6. Soit $(E, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Un endomorphisme $u$ de $E$ est un *automorphisme orthogonal* si et seulement si,

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$$

Le *groupe orthogonal* $\mathcal{O}(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux.

Remarque 4. Un tel endomorphisme est bien un automorphisme : il est injectif, car si $u(x) = 0$ alors $\langle u(x) | u(x) \rangle = \langle x | x \rangle = 0$ donc $x = 0$. Puisque $E$ est de dimension finie, le théorème du rang assure que l'endomorphisme $u$ est surjectif : $\dim E = \mathrm{rg}(u)$.

Remarque 5. La définition 6 appliquée à $x = y$ montre qu'un automorphisme orthogonal $u$ préserve la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$. En particulier, si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $|\lambda| = 1$.

## 2.2 Matrices orthogonales

Définition 7. Une *matrice orthogonale* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice telle que ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{Id}$.

On note $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 6. L'endomorphisme canoniquement associé à une matrice orthogonal est un automorphisme orthogonal. En effet, si $A \in \mathcal{O}_n$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle Ax | Ay \rangle = {}^{\mathrm{t}}(Ax)Ay = {}^{\mathrm{t}}x\,{}^{\mathrm{t}}AAy = {}^{\mathrm{t}}xy = \langle x | y \rangle$$

Remarque 7. La matrice de passage d'une base orthonormale dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

Remarque 8. Une matrice orthogonale $A$ est inversible d'inverse sa transposée ${}^{\mathrm{t}}A$. Cette propriété facilite les changements de base orthogonaux.

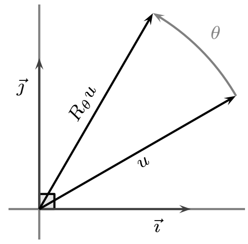
Remarque 9. $\mathcal{O}_n$ est un groupe multiplicatif : le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, l'identité est orthogonale et l'inverse d'une matrice orthogonale l'est aussi.

## 2.3 Groupe orthogonal du plan

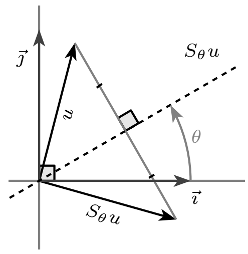
**Proposition 6.**

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le groupe orthogonal du plan $\mathcal{O}_2$ est composé :

- $\star$ des rotations de centre $\vec{0}$ et d'angle $\theta\in\mathbb{R}$ : $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
- $\star$ des réflexions d'axe formant un angle $\theta$ avec $\vec{\imath}$ : $S_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$




*Démonstration.* Si $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{O}_2$ alors ${}^{\mathrm{t}}AA=\mathrm{Id}$,
donc $\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
En posant $z=a+\mathrm{i}b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ($|z|^2=a^2+b^2=1$) et de même, $z'=d+\mathrm{i}c=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, la condition $ac+bd=0$ implique $\Im\mathrm{m}\, zz'=0$ donc $\theta+\theta'=0\ [\pi]$. Le premier cas correspond à $\theta=-\theta'\ [2\pi]$, le second à $\theta=\pi-\theta'\ [2\pi]$. $\square$




Méthode 1. Reconnaître une isométrie du plan

Si $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ${}^{\mathrm{t}}AA=\mathrm{Id}$ alors $A\in\mathcal{O}_2$. On distingue deux cas :

- $\star$ $\det A=1$ : $A$ est la matrice d'une rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ (cos et sin dans la première colonne).
- $\star$ $\det A=-1$ : $A$ est la matrice d'une réflexion, les vecteurs invariants dirigent l'axe de réflexion.

## 2.4 Groupe orthogonal de l'espace

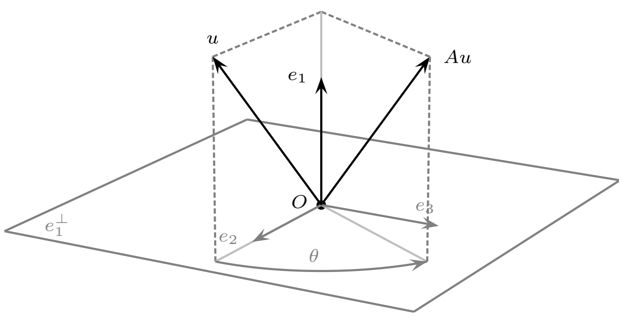
**Proposition 7.**

Soit $A\in\mathcal{O}_3$. Il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$, telle qu'en notant $P=[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$ ($\det P=1$), on ait :

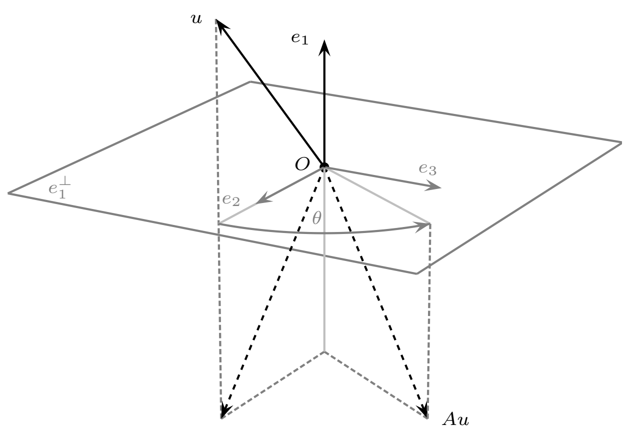
$$ {}^{\mathrm{t}}PAP=\begin{pmatrix}\pm1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\quad\text{avec } \theta\in\mathbb{R}. $$

- $\star$ si $\det A=+1$ : $\pm1=1$ et on a une rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1$ et d'angle $\theta$.
- $\star$ si $\det A=-1$ : $\pm1=-1$ et on a la composée d'une symétrie orthogonale par rapport au plan de vecteur normal $e_1$ (passant par 0) et la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1$ et d'angle $\theta$.

Rotation d'angle $\theta$, d'axe dirigé par $\vec{e}_1$




Réflexion-rotation d'angle $\theta$ et d'axe dirigé par $\vec{e}_1$




*Démonstration.* Chaque valeur propre $\lambda$ est de module 1, car la matrice orthogonale préserve la norme : si $x$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda$ : $\|x\|=\|Ax\|=\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ donc $|\lambda|=1$. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3, il a une valeur propre réelle au moins : 1 ou $-1$. On note $e_1$ un vecteur propre unitaire associé. La matrice $A$ préserve le plan normal à $e_1$, et induit un automorphisme orthogonal de ce plan. On conclut en appliquant 6. $\square$

Méthode 2. Reconnaître une rotation de l'espace

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^{t}AA = \mathrm{Id}$. Si $\det A = 1$, on a une rotation et 1 est valeur propre. On cherche un vecteur invariant $e_1$ de $\ker(A - \mathrm{Id})$. On a $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$ (somme des coefficients diagonaux) et le signe de $\sin\theta$ est le même que celui de $\det(e_1, e_2, Ae_2)$ où $e_2$ est un vecteur orthogonal à $e_1$.

Exemple 5. Reconnaître l'automorphisme canoniquement associé à $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 10. Dans le cas d'une composée de symétrie et de rotation, $e_1$ est un vecteur propre unitaire de la valeur propre $-1$, $\mathrm{tr}(A) = 2\cos\theta - 1$ et le signe de $\sin\theta$ est l'opposé de celui de $\det(e_1, e_2, Ae_2)$ où $e_2$ est un vecteur orthogonal à $e_1$.

# 3. Endomorphisme symétrique

## 3.1 Définition et matrice

Définition 8. Un *endomorphisme symétrique* $u$ d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un endomorphisme de $E$ tel que $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$..

Remarque 11. La matrice d'un endomorphisme symétrique $u$ d'un espace euclidien $E$ de dimension finie $n$, dans une base orthonormal, est une matrice symétrique : notons $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (s_{ij})$ dans la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ on a : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ s_{ij} = \langle u(e_i)|e_j\rangle = \langle e_i|u(e_j)\rangle = \langle u(e_j)|e_i\rangle = s_{ji}$.

## 3.2 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Théorème 8. Spectral

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles et l'endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormale.

*Démonstration.* Soit $S$ la matrice (symétrique) de $u$ dans une base orthonormale et $\lambda$ une valeur propre (a priori complexe) de $S$, de vecteur propre $X \in \mathbb{C}^n$.

Alors ${}^{t}\bar{X}X = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$ et $\lambda {}^{t}\bar{X}X = {}^{t}\bar{X}(\lambda X) = {}^{t}\bar{X}SX = {}^{t}\bar{X}{}^{t}\bar{S}X = {}^{t}\overline{SX}X = \bar{\lambda}{}^{t}\bar{X}X$ donc $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$

On démontre par récurrence sur la dimension $n$ qu'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $n$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

⋆ initialisation si $n = 1$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \lambda x$ : $u$ est diagonalisable dans la base orthonormée (1).

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie au rang $n$.

Soit $u$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $n+1$. Il possède au moins une valeurs propre $\lambda$ (théorème de d'Alembert), dont on vient de prouver qu'elle était réelle. Soit $x$ un vecteur propre associé. On a : $E = \mathbb{R}x \oplus (\mathbb{R}x)^{\perp}$. L'espace vectoriel $F = (\mathbb{R}x)^{\perp}$ est de dimension $n$ et $\forall y \in F,\ \langle u(y)|x\rangle = \langle y|u(x)\rangle = \langle y|\lambda x\rangle = \lambda\langle y|x\rangle = 0$ donc $u(y) \in F$. Ainsi $F$ est stable par $u$, et la restriction $u|_F$ de $u$ à $F$ définit un endomorphisme symétrique, par hypothèse diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Par définition, $(x, e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $E$ dans laquelle $u$ est diagonalisable : la propriété est vraie au rang $n+1$. $\square$

Remarque 12. Ainsi, une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale pour le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 6. On considère la *forme quadratique* $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0$.

Montrer que $\varphi(x,y) = 0 \iff {}^{t}XAX = 0$ où $X$ est un vecteur et $A$ est une matrice symétrique.

En diagonalisant $A$, montrer que $\varphi(x,y) = 0$ est l'équation d'une conique que l'on caractérisera.

# Bilan du § 24

## Prérequis

① Géométrie du plan : orthogonalité : §4 Géométrie plane .................... ☐
② Géométrie dans l'espace : orthogonalité : §6 Géométrie spatiale .................... ☐
③ Matrices : tout ! §9 Matrices .................... ☐
④ Espaces vectoriels : définitions, notion de base §11 Espaces vectoriels .................... ☐
⑤ Réduction d'endomorphismes : tout ! §19 Réduction d'endomorphismes .................... ☐

## Objectifs prioritaires

① Connaître la définition 1 du produit scalaire .................... ☐
   (a) Savoir vérifier la définition du produit scalaire dans les exemples 1, 3, et 2) .................... ☐
② Connaître les inégalités de Cauchy-Schwarz (proposition 1) et triangulaire (proposition 2) .................... ☐
③ Connaître le théorème de Pythagore ! (proposition 3) .................... ☐
④ Savoir ce qu'est une projection orthogonale, et son application aux distances (section 1.2) .................... ☐
⑤ savoir ce qu'est une base orthogonale (section 1.3) .................... ☐
⑥ définition et propriétés des matrices orthogonales (section 2.2 et 2.1) .................... ☐
⑦ savoir ce qu'est un endomorphisme symétrique, connaître le théorème spectral (section 3) .................... ☐

## Objectifs secondaires

① interprétation géométrique des éléments du groupe orthogonal du plan (section 2.3) .................... ☐
② interprétation géométrique des éléments du groupe orthogonal de l'espace (section 2.4) .................... ☐

# TD DU § 24

**Exercice 1. Inégalité dans un espace euclidien**
Soit $E$ un espace euclidien, montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ 1 + \|x+y\|^2 \leqslant 2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)$.

**Exercice 2. Endomorphisme de même norme**
Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $f, g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|$. Démontrer que, $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x) | f(y)\rangle = \langle g(x) | g(y)\rangle$.

En déduire qu'un endomorphisme qui préserve la norme est un automorphisme orthogonal.

**Exercice 3. Choix d'un bon produit scalaire**
Soient $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que si $x^2+2y^2+3z^2 \leqslant 1$, alors $(x+y+z)^2 \leqslant \dfrac{11}{6}$.

**Exercice 4. Interprétation géométrique de la dérivée sur** $\mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$
Soit $E$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions cosinus, sinus et la fonction constante 1.

L'espace $E$ est muni du produit scalaire : $\forall f, g \in E,\ \langle f | g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

① Vérifier le caractère défini du produit scalaire.
② Trouver une base orthonormée directe de $E$.
③ Démontrer que la dérivation $E \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $E$.
Donner sa matrice dans la base orthonormée de la question précédente.
④ Vérifier que la dérivation est la composée d'une projection orthogonale et d'une rotation axiale.

**Exercice 5. Distance euclidienne**
Calculer la distance

① entre l'origine de $\mathbb{R}^4$ et le plan passant par $A(1\,;0\,;0\,;0)$ et dirigé par $\vec{u}(1\,;1\,;0\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;2\,;2)$

**Exercice 6. Distance d'une matrice à un sous-espace matriciel**
On munit l'espace des matrices $3\times 3$ réelles $E = \mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

Déterminer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel de $E$ formé des matrices antisymétriques réelles : $F = \mathrm{ASym}_3(\mathbb{R})$.

**Exercice 7. Géométrie dans** $\mathbb{R}_2[X]$
On munit l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, $E = \mathbb{R}_2[X]$, du produit scalaire défini par $\langle P \mid Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

① Vérifier le caractère défini positif du produit scalaire considéré.
② Calculer $\|X-1\|$ et $\|X^2+1\|$.
Sans la calculer, en déduire que la norme de $X(X+1)$ est inférieure ou égale à $\sqrt{2}+\sqrt{30}$.
③ Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel $F$ engendré par 1 et $X$.
En déduire $\|3X^2-6X+1\|^2 + \|6X-1\|^2$.
④ Déterminer le projeté orthogonal de $5X^2+X+2$ sur $F$.

**Exercice 8. Étude d'une matrice orthogonale** ATS 2003
Donner la nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est, dans une base orthonormée : $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

**Exercice 9. Éléments du groupe orthogonal** $\mathrm{O}(3)$
Donner la nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est, dans une base orthonormée :

① $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ ② $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ ③ $-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

### Exercice 10. Transformations orthogonales de l'espace

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté par sa base canonique.

Donner la matrice dans la base canonique de la transformation suivante :

① la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par $B(1\,;0\,;0)$ et dirigée par $\vec{u}(1\,;1\,;1)$
② la projection orthogonale sur le plan passant par l'origine et dirigé par $\vec{u}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;2)$
③ la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour du vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}(1\,;1\,;1)$.

### Exercice 11. Inversibilité d'une matrice symétrique

Justifier sans calcul que la matrice suivante est inversible dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ : $A = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 2-\mathrm{i} & 18 & 2 \\ -3 & 18 & 3-\mathrm{i} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

### Exercice 12. Endomorphisme symétrique sur les polynômes

Soit l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ (P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

① Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.
② Pour tout $P \in E$, on note $T(P) = (X^2 - X)P'' + (2X-1)P'$. Montrer que $T$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

### Exercice 13. Diagonalisation de forme quadratique

Vérifier que $q$ est une forme quadratique et diagonaliser $q$ dans une base orthonormée adaptée.

① $q(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + y^2 + \dfrac{z^2}{2} + xz$.
② $\varphi(x,y) = 2xy$