§ 22 : Fonctions de plusieurs variables

1. Fonctions de plusieurs variables

1.1 Un peu de topologie de $\mathbb{R}^n$

Remarque 1. Dans tout le chapitre, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel, ainsi que de la nome euclidienne et de la distance qui en découlent :

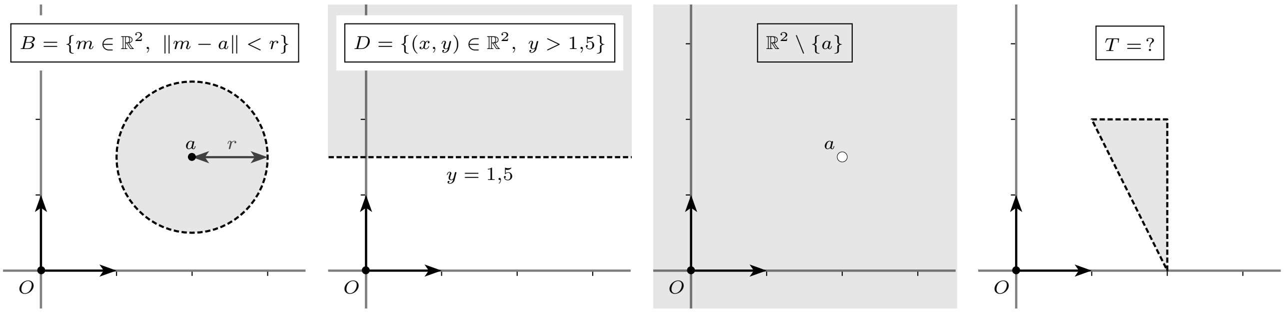
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2}$$

Définition 1. Une *boule ouverte* de $\mathbb{R}^n$ de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est un ensemble de la forme

$$\mathrm{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$$

De manière général, un ensemble *ouvert* est une réunion de boules ouvertes (peut-être en quantité infinie).

Exemple 1. Les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$:



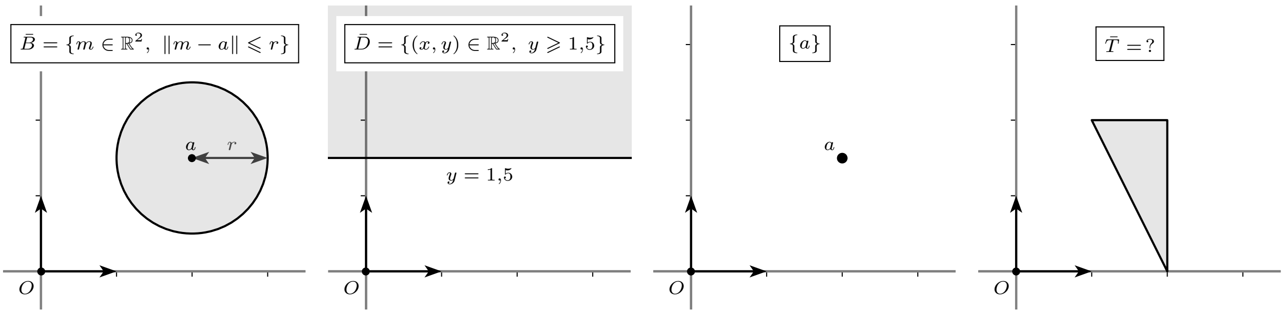
L'ensemble $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide $\varnothing$ sont des ouverts également.

Remarque 2. Les ensembles ouverts vont jouer dans la théorie des fonctions de plusieurs variables un rôle semblable à celui des (réunion d') intervalles ouverts ($]a\,;b[$, $]a\,;+\infty[$,...) dans la théorie des fonctions d'une seule variable. De manière générale, un ensemble de vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ décrit à partir d'inégalités strictes sur les fonctions coordonnées ou la norme de x est un ouvert.

Définition 2. Un ensemble $\mathcal{F}$ est *fermé* lorsqu'il est le complémentaire d'un ensemble ouvert $\mathcal{O}$: $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$.
Un ensemble E est *borné* s'il est inclus dans une boule de rayon r : $E \subset \mathrm{B}(a,r)$.

Remarque 3. Les ensembles fermés vont jouer dans la théorie des fonctions de plusieurs variables un rôle semblable à celui des (réunion d') intervalles fermés ($[a\,;b]$, $[a\,;+\infty[$,...) dans la théorie des fonctions d'une seule variable. De manière générale, un ensemble de vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ décrit à partir d'inégalités larges sur les fonctions coordonnées ou la norme de x est un fermé.

Exemple 2. Les ensembles $\mathbb{R}^2$, $\varnothing$, les singletons $\{a\}$ ou les ensembles composés d'un nombre fini de points sont fermés. La réunion de B, D ou T (exemple 1) avec sa frontière en pointillés, est fermée :



L'ensemble $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide $\varnothing$ sont des fermés également.

Parmi les ensembles de l'exemple 1, seuls B, T et $\varnothing$ sont bornés.

1.2 Fonctions continues de plusieurs variables

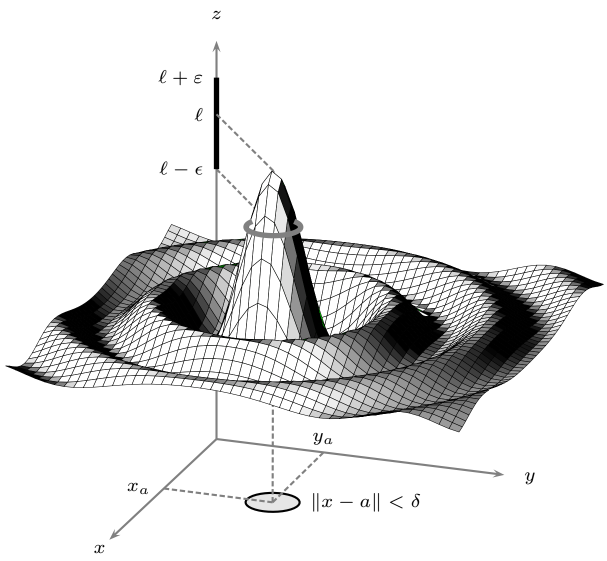
Définition 3. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs réelle. La limite de la fonction f lorsque $x \in U$ tend vers a (au bord de l'ouvert U) est nulle si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \|x-a\| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Pour $\ell \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) - \ell = 0$$



Remarque 4. Les coordonnées polaires simplifient souvent les calculs. Si le membre de droite ne dépend pas de θ (sinon la limite n'existe pas) on a :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Exemple 3. Si elles existent calculer les limites : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - 2yx^2 + y^4}{x^2+y^2}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$

Définition 4. La fonction f définie sur l'ouvert U est continue en $a \in U$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
La fonction f est continue sur U lorsqu'elle l'est en tout point de U.

Exemple 4. ✎ Vérifier la continuité en $a = (2\,;1{,}5)$ de la fonction représentée ci dessus et définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a\},\ f(x,y) = 2{,}5 + \frac{2\sin\left(5\sqrt{(x-2)^2+(y-1{,}5)^2}\right)}{5\sqrt{(x-2)^2+(y-1{,}5)^2}} \text{ et } f(a) = 4{,}5$$

Théorème 1. Weierstrass

Toute fonction continue sur un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Admis. Ce théorème généralise le théorème qui affirme qu'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est bornée et atteint ses bornes. □

1.3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Remarque 5. On a déjà rencontré ces fonctions lors d'études de courbes paramétrées, ou en considérant des fonctions à valeurs complexes.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On note $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$ pour tout $x \in U$. Soit a dans (ou au bord de) l'ouvert U. On définit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall j \in [\![1\,;p]\!],\ \lim_{x \to a} f_j(x) = \ell_j$$

Remarque 6. Ainsi, les problèmes de limite, de continuité, ou liés aux dérivées partielles de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ se traitent coordonnées par coordonnées.

Les opérations algébriques sur les limites sont les mêmes que pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En particulier, les fonctions continues sur un ouvert de U et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ forment un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, de même que les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (en un sens que l'on précisera).

2. Dérivées partielles

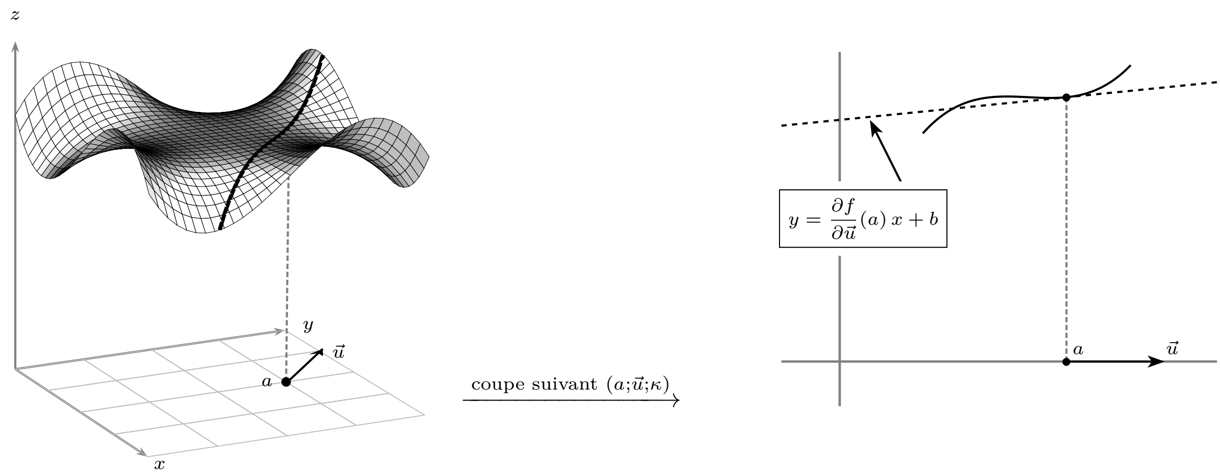
2.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

DÉFINITION 6. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, soit $a \in U$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'elle existe la limite suivante définit la dérivée de f en a suivant le vecteur $\vec{u}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\vec{u}) - f(a)}{h}$$

L'application $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$ est la dérivée de f suivant le vecteur $\vec{u}$.

REMARQUE 7. La dérivée de f en a suivant le vecteur $\vec{u}$ est géométriquement la pente de la courbe obtenue en coupant le graphe de f dans $\mathbb{R}^{n+1}$ suivant le plan $(a, \vec{u}, \kappa)$ où $\kappa(0, \ldots, 0, 1)$:



DÉFINITION 7. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $a \in U$. La k-ième dérivée partielle première de f en a est :

$$D_k f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(a)$$

Lorsque les dérivées partielles $D_1(f), \ldots, D_n(f)$ sont continues en a, f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ en a.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en tout $a \in U$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

EXEMPLE 5. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x\sqrt{x^2 + y^2}$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, puis dire si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 2. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ D'ORDRE 1

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.
Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a pour $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$:

$$f(a + h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} + \mathrm{o}_0(\|h\|)$$

NOTATION 1. En considérant, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, l'application linéaire $\mathrm{d}x_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (h_1, \ldots, h_n) \mapsto h_k$, puis, pour tout $a \in U$, l'application linéaire (dite *différentielle* de f en a) :

$$\mathrm{d}_a f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ a \mapsto \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

le développement limité précédent s'écrit $f(a + h) = f(a) + \mathrm{d}_a f(h) + \mathrm{o}_0(\|h\|)$.

En notant $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, on peut aussi écrire : $f(a + h) = f(a) + \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) | h \rangle + \mathrm{o}_0(\|h\|)$.

Démonstration. Pour $n=2$, il suffit de voir : $f(\alpha+h,\beta+k)=f(\alpha+\beta)+h\dfrac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}+k\dfrac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}+\mathrm{o}_0(\sqrt{h^2+k^2})$.

En passant tout du même côté et en divisant par $\sqrt{h^2+k^2}$, on est amené à considérer la limite de :

$$\left(\left[\frac{f(\alpha+h,\beta+k)-f(\alpha,\beta+k)}{h}-\frac{\partial f(\alpha,\beta+k)}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial f(\alpha,\beta+k)}{\partial x}-\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}\right]\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+$$
$$+\left[\frac{f(\alpha,\beta+k)-f(\alpha,\beta)}{k}-\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}\right]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

On remarque que $\left|\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leqslant 1$ et $\left|\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leqslant 1$.

L'existence des dérivées partielles prouve : $\left[\dfrac{f(\alpha,\beta+k)-f(\alpha,\beta)}{k}-\dfrac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}\right]\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$

La continuité des dérivées partielles implique d'une part : $\left[\dfrac{\partial f(\alpha,\beta+k)}{\partial x}-\dfrac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}\right]\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$

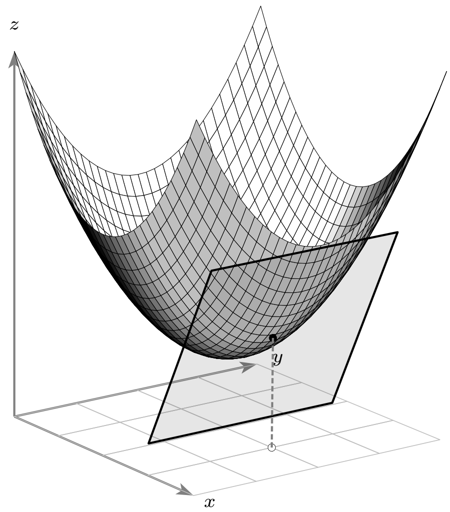
Et d'autre part, par le théorème des accroissements finis, $\exists h_0\in\,]0\,;h[$ tel que :

$$\left[\frac{f(\alpha+h,\beta+k)-f(\alpha,\beta+k)}{h}-\frac{\partial f(\alpha,\beta+k)}{\partial x}\right]=\frac{\partial f(\alpha+h_0,\beta+k)}{\partial x}-\frac{\partial f(\alpha,\beta+k)}{\partial x}\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$$

On obtient le résultat en appliquant ces limites après l'utilisation de l'inégalité triangulaire. □

Remarque 8. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et $(\alpha,\beta)\in U$. Le développement limité à l'ordre 1 nous incite à définir le *plan tangent* à la surface d'équation $z=f(x,y)$ comme le plan passant par s'interprète, pour $n=2$, par l'existence d'un plan tangent à la surface représentative de f au point $A(\alpha,\beta,f(\alpha,\beta))$ comme le plan d'équation

$$z=\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}(x-\alpha)+\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}(y-\beta)+f(\alpha,\beta)$$



Exemple 6. ✎ Soit la surface S d'équation $z=f(x,y)$ représentée ci-contre, où

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{2}+1.$$

Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $(3\,;2\,;1{,}5)$.

2.2 Composition

Proposition 3.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
Soient x et y deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que $\forall t\in I,\ (x(t),y(t))\in U$.
Alors la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ t\mapsto f(x(t),y(t))$ est dérivable sur I, de dérivée g' vérifiant

$$\forall t\in I\ g'(t)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))+y'\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))$$

Avec les notations de la physique : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Démonstration. Pour tout $t\in I$, on compose les développements limités $x(t+h)=x(t)+hx'(t)+\mathrm{o}_0(h)$ et $y(t+h)=y(t)+hy'(t)+\mathrm{o}_0(h)$ avec le développement de la proposition 2

$$f(\alpha+k_1,\beta+k_2)=f(\alpha,\beta)+k_1\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)+k_2\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)+\mathrm{o}_0\left(\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)$$

en posant $\alpha = x(t)$, $\beta = y(t)$, $k_1 = hx'(t) + \mathrm{o}_0(h)$ et $k_2 = hy'(t) + \mathrm{o}_0(h)$ on obtient

$$g(t) = f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t), y(t)) + h\left[x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right] + \mathrm{o}_0(h)$$

d'où $g(t+h) = g(t) + hg'(t) + \mathrm{o}_0(h)$ avec $g'(t)$ de la forme attendue (le caractère $\mathcal{C}^1$ en découle) □

Remarque 9. En particulier, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, telles que $\forall(u,v) \in V^2,\ (x(u,v), y(u,v)) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

En notant $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, on a $\mathrm{d}g = J\,\mathrm{d}f$ où $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne du changement de variables $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$.

Exemple 7 (Gradient en polaires). Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$ en fonction de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

En déduire qu'une fonction f est invariante par rotation de centre O si et seulement si $y\dfrac{\partial f}{\partial x} = x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 8. Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 4. Schwarz

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Démonstration. Soient $a = (x,y) \in U$ et $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r) \subset U$. Soit $k \in\,]-r\,;r[$. On définit pour tout $h \in\,]-r\,;r[$: $g : h \mapsto f(x+h, y+k) - f(x+h, y)$. Le théorème des accroissements finis montre l'existence d'un $h_1 \in\,]0\,;h[$ tel que $hg'(h_0) = g(x+h_0) - g(x)$, soit :

$$h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x+h_1, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+h_1, y)\right) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $k \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+h_1, y+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+h_1, y)$, $\exists k_1 \in\,]0\,;k[$:

$$kh\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x+h_1, y+k_1) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$$

En intervertissant les rôles de h et k on obtient aussi : $(h_2, k_2) \in\,]0\,;h[\, \times\,]0\,;k[$ tels que :

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x+h_1, y+k_1) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x+h_2, y+k_2)$$

En faisant tendre (h,k) vers $(0,0)$, et par continuité des dérivées secondes, on obtient l'égalité recherchée. □

Exemple 8. ✎ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Qu'en conclure ?

Proposition 5. Développement limités d'ordre 2

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$. Pour $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $a + h \in U$:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \mathrm{o}_0(\|h\|^2)$$

Remarque 10 (Points critiques). Le développement limité d'ordre 1 montre que si (x, y) est un extremum local d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors (x, y) est un *point critique* :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

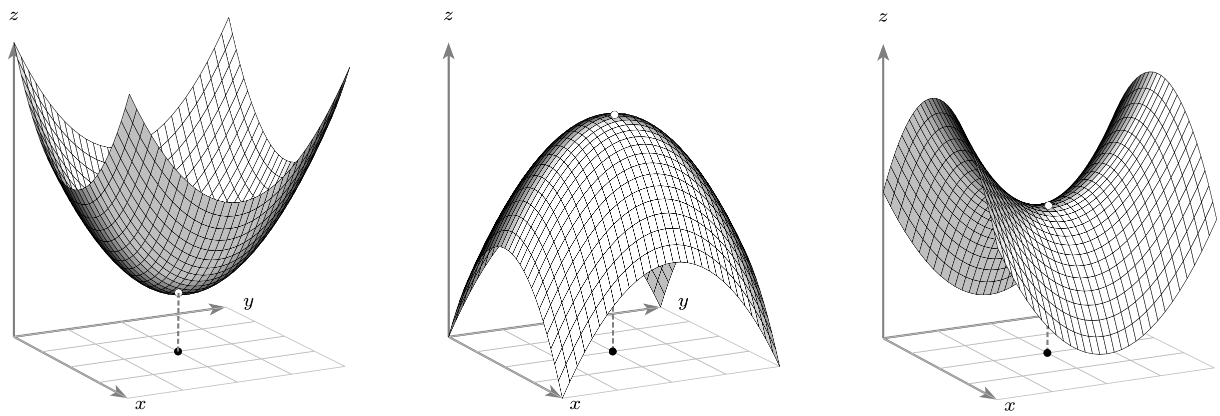
Remarque 11 (Notation de Monge). Réciproquement, soit (x, y) un point critique d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U.

Avec les notations de Monge $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$:

$$f(x+h, y+k) = f(x; y) + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + \mathrm{o}_0(h^2 + k^2)$$

Pour $k \neq 0$, $\varphi(h, k) = k^2(rX^2 + 2sX + tX)$ avec $X = h/k$ est de discriminant $\Delta = s^2 - rt$. Alors

- ⋆ si $\Delta = s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, $\varphi(h, k) > 0$: (x, y) est un minimum local
- ⋆ si $\Delta = s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, $\varphi(h, k) > 0$: (x, y) est un maximum local
- ⋆ si $\Delta = s^2 - rt > 0$: (x, y) est un point selle (ni maximum, ni minimum) : $\varphi(h, k)$ change de signe au voisinage de $(0, 0)$ en fonction du rapport h/k.
- ⋆ si $\Delta = s^2 - rt = 0$: on ne peut pas conclure.



Minimum : $rt - s^2 > 0$, $r > 0$ | Maximum : $rt - s^2 > 0$, $r < 0$ | Point selle : $rt - s^2 < 0$

Exemple 9. ✎ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 4x^2 + 4xy + 4y^2 + x^3$.

Trouver les points critiques de f et déterminer leur nature.

2.4 Surfaces

Définition 9. Soient x, y, z trois fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

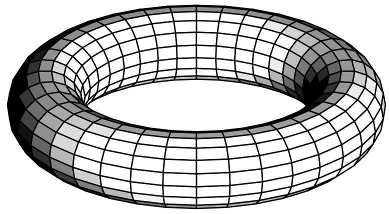
L'ensemble des points de l'espace $\mathcal{S}$ tels que

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

est une *nappe* ou *surface paramétrée*.

DÉFINITION 10. Lorsque
$$0 \neq \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix},$$
le point (u,v) est un *point régulier* de la surface $\mathcal{S}$ et $\vec{n}(u,v)$ est un vecteur normal à $\mathcal{S}$ en (u,v).
Le *plan tangent* à $\mathcal{S}$ en $M(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ est le plan passant par M normal à $\vec{n}(u,v)$.
La *normale* à $\mathcal{S}$ en $M(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ est la droite passant par M dirigée par $\vec{n}(u,v)$.

EXEMPLE 10 (Tore). Soit la surface $\mathcal{T}$ paramétrée par

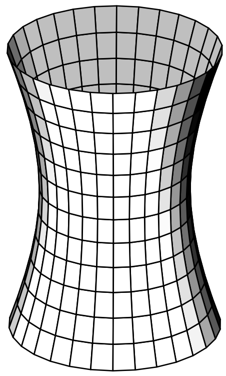


$$\begin{cases} x = -\sin\theta\,(4+\cos\varphi) \\ y = \quad \cos\theta\,(4+\cos\varphi) \\ z = \quad \sin\varphi \end{cases}, \quad (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Vérifier que la surface $\mathcal{T}$ est régulière (chacun de ses points est régulier).
Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{T}$ en M.

DÉFINITION 11. Soit F une application de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x,y,z)$ tels que $F(x,y,z)=0$ est la *surface* d'équation implicite $F(x,y,z)=0$.

REMARQUE 12. Un point $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(x,y,z) \neq \vec{0}$ est un point régulier. Le gradient est alors un vecteur normal au plan tangent à $\mathcal{S}$ en M, ou un vecteur directeur de la normale à $\mathcal{S}$ en M.



EXEMPLE 11 (Hyperboloïde à une nappe). Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2+y^2-z^2-1=0$. Vérifier qu'elle est régulière en tout point.

REMARQUE 13. Les surfaces définies par une équation implicite incluent les surfaces étudiées dans la section 1 (d'équations $F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$) et les courbes de niveau du type $F(x,y,z)=0 \iff F(x,y,z)-\lambda=0$).

3. Calcul intégral

3.1 Intégrale double sur un rectangle

DÉFINITION 12. Soient $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ quatre réels. Soit f une fonction continue sur le rectangle $R = [a\,;b] \times [c\,;d] \subset \mathbb{R}^2$. Alors l'*intégrale double* de f sur le rectangle P est définie par
$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

PROPOSITION 6.

Soient f et g deux fonctions continues sur un pavé R. On a :

① Fubini : $\displaystyle\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

② linéarité : $\displaystyle\iint_R \big(\lambda f(x,y)+g(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

③ croissance : si $\forall (x,y) \in R,\ f(x,y) \leqslant g(x,y)$ alors $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

④ additivité : $\displaystyle\iint_{R\cup R'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{R'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ les rectangles R et R' n'ayant au plus qu'un côté en commun.

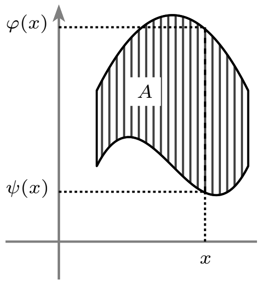
EXEMPLE 12. Calculer $\displaystyle\iint_{[0;1]\times[1;2]} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y}$ et $\displaystyle\iint_{[0;1]^2} \frac{y\,\mathrm{e}^{x+y^2}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Remarque 14 (Interprétation géométrique). Lorsque la fonction f est positive, l'intégrale double s'interprète comme le volume, exprimé en unités de volume, de l'espace situé sous la surface d'équation $z = f(x, y)$, au dessus du plan $z = 0$, au dessus du rectangle R.

3.2 Intégrale double sur d'autres domaines

Définition 13 (Intégration par piles). L'intégrale d'une fonction f continue sur un domaine $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [a\,;b],\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$ avec φ et ψ des fonctions continues sur $[a\,;b]$ se définit par :

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$



Remarque 15. On définit de même l'intégration par tranches, en permutant les rôles de x et de y. Ces définitions sont compatibles avec la définition sur le pavé, de sorte que les propriétés de la proposition 6 s'étendent à ce nouveau cadre.

Exemple 13. Calculer le volume sous la surface d'équation $z = xy(1 - x - y)$ et au dessus du triangle de sommets O, $A(0\,;1)$ et $B(1\,;0)$.

Proposition 7. Intégrale sur un secteur

Soit le secteur $S = \{(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (r, \theta) \in R = [r_1\,;r_2] \times [\theta_1\,;\theta_2]\}$ et f une fonction continue sur S. Alors

$$\iint_S f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Exemple 14. Soit $Q_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r\}$. Calculer $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{Q_r} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

3.3 Intégrales triples

Définition 14. Soient $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$ et $c_1 \leqslant c_2$ six réels. Soit f une fonction continue sur le pavé $P = [a_1\,;a_2] \times [b_1\,;b_2][c_1\,;c_2] \subset \mathbb{R}^3$. Alors l'*intégrale triple* de f sur le pavé P est définie par

$$\iiint_P f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Remarque 16. Les propriétés de la proposition 6 (en particulier le théorème de Fubini) se généralisent aux intégrales triples. Il en va de même des méthodes d'intégration par piles (une intégrale double suivie d'une intégrale simple) et par tranches (une intégrale simple suivie d'une intégrale double).

Proposition 8 (Changement de variable cylindrique). Soit f une fonction continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$ qui s'écrit comme un pavé P en les coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{alors} \quad \iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_P f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Proposition 9 (Changement de variable sphérique). Soit f une fonction continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$ qui s'écrit comme un pavé P en les coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{alors} \quad \iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_P f(r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\phi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

avec $\varphi \in [0\,;\pi]$.

Bilan du § 22

Prérequis

① Géométrie du plan : §4 Géométrie plane . . . . . ☐
② Géométrie dans l'espace : §6 Géométrie spatiale . . . . . ☐
③ Limites : §10 Limites . . . . . ☐

Objectifs prioritaires

① Savoir ce qu'est un ensemble ouvert (section 1.1) . . . . . ☐
② Limite et continuité d'une fonction de plusieurs variables (section 1.2) . . . . . ☐
③ Savoir ce qu'est une dérivée partielle, une fonction $\mathcal{C}^1$ (définition 7) . . . . . ☐
④ Savoir écrire un développement limité d'ordre 1 (proposition 2) . . . . . ☐
⑤ Savoir trouver l'équation d'un plan tangent à une surface $z = f(x, y)$ (remarque 8) . . . . . ☐
⑥ Savoir dériver des composées (section 2.2) . . . . . ☐
⑦ Connaître le théorème de Schwarz (théorème 4) . . . . . ☐
⑧ Savoir écrire un développement limité d'ordre 2 (proposition 5) . . . . . ☐
⑨ Savoir rechercher les extrema locaux d'une fonction de deux variables (remarques 10 et 11) . . . . . ☐
⑩ Connaître les propriétés de l'intégrale double (section 3.1) . . . . . ☐
⑪ Savoir calculer une intégrale double par tranche, par pile ou changement polaire (section 3.2) . . . . . ☐

Objectifs secondaires

① Savoir ce qu'est une dérivée directionnelle (selon un vecteur, définition 6) . . . . . ☐
② Savoir utiliser les fonctions coordonnées pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (section 1.3) . . . . . ☐
③ Savoir trouver un plan tangent d'une surface paramétrée ou implicite (section 2.4) . . . . . ☐
④ Connaître les changements sphériques ou cylindriques dans une intégrale triple (section 3.3) . . . . . ☐

Approfondissement

① comprendre les démonstration des proposition 2 et théorème 4 . . . . . ☐

TD du § 22

Exercice 1. Étude de points critiques
Rechercher les extrema locaux et globaux de l'application

① $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.
② $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.
③ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x - y)\mathrm{e}^{xy}$.
④ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto y\big(x^2 + (\ln y)^2\big)$.
⑤ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^{-y} + y\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2. Dérivées secondes : l'exemple de Peano
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0)$. Qu'en conclure ?

Exercice 3. Laplacien en coordonnées polaires
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(0, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < R^2\}$ avec $R > 0$.

On pose $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

Exercice 4. Équation aux dérivées partielles linéaire
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy$$

en utilisant le changement de variables : $u = x$ et $v = 3x - 2y$.

Exercice 5. Déterminant de dérivées partielles
Soit $\Delta : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R},\ (a, b, c, d) \mapsto ad - bc$ et $\partial(\Delta) = \dfrac{\partial^2}{\partial a\, \partial d} - \dfrac{\partial^2}{\partial b\, \partial c}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \partial(\Delta)\Delta^n = (n + 1)n\Delta^{n-1}$.

Exercice 6. Rectangles dont un côté est entier
Pour $(a, b, L, \ell) \in \mathbb{R}^4$, calculer $\varphi(a, b, L, \ell) = \displaystyle\iint_{[a;a+L]\times[b;b+\ell]} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(x+y)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

En déduire qu'un rectangle découpé en rectangles dont au moins un côté est un nombre entier a lui même au moins un côté entier.

Exercice 7. Calcul d'intégrales multiples
Calculer l'intégrale :

① $\displaystyle\iiint_\Sigma xyz\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3\ :\ x + y + z \leqslant 1\}$.
② $\displaystyle\iint_D xy\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est l'intersection des intérieurs de deux paraboles : $y^2 \leqslant 2px$ et $x^2 \geqslant 2py$
③ $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$

Exercice 8. Intégrale de Gauss
Soit $R > 0$. On considère le quart de disque $\mathcal{Q}(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$.

① Calculer $I_R = \displaystyle\iint_{\mathcal{Q}(R)} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

② Justifier que $\mathcal{Q}(R) \subset [0\,;1]^2 \subset \mathcal{Q}(R\sqrt{2})$. En déduire $I_R \leqslant \left(\displaystyle\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant I_{R\sqrt{2}}$.

③ Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.