§ 22 : Séries entières

1. Série entière à coefficients complexes

1.1 Notion de série entière

Notation 1. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes : $\mathbb{C}$

Définition 1. Un *série entière* à coefficients dans $\mathbb{K}$ est définie par une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et notée $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$.

L'ensemble des séries entières à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[[X]]$.

Soit $\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{K},\ \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n \text{ converge} \right\}$. La *somme* de la série entière est l'application $\mathcal{D} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Les sommes partielles sont les $S_N : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, où $N \in \mathbb{N}$.

Remarque 1. Toute série entière converge pour $x = 0$.

1.2 Rayon de convergence

Lemme 1 (Abel). Soit une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$.

- ⋆ si la série converge pour z_0, alors la somme existe et converge absolument pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.
- ⋆ si la série diverge pour z_0, alors la série diverge (n'est même pas bornée) pour tout z tel que $|z| > |z_0|$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < |z_0|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$.

Si la série de terme $a_n z_0^n$ converge, $|a_n z_0^n| \longrightarrow 0$ donc $|a_n z^n| = o_{+\infty}\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$. Or $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, et par comparaison, la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument.

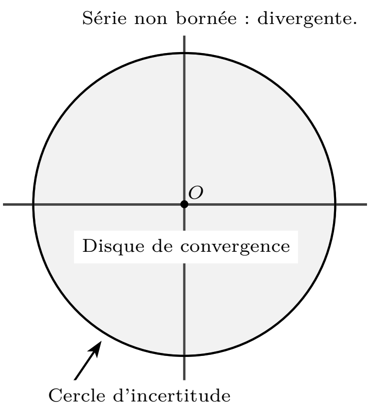
La contraposée du point précédent permet d'affirmer que si la série de terme $a_n z_0^n$ diverge, la série de terme $a_n z^n$ diverge aussi (avec $|z| > |z_0|$). □

Le lemme d'Abel a la conséquence suivante :

Proposition 2. Rayon de convergence

Soit une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$.
Il existe $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, appelé *rayon de convergence de la série*, tel que :

- ⋆ si $|z| < R$, la série converge absolument.
- ⋆ si $|z| = R$, la série peut diverger ou converger.
- ⋆ si $|z| > R$, la série diverge grossièrement.



Exemple 1. ✎ Déterminer la somme et le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Exemple 2. ✎ Vérifier que 1 est le rayon de convergence des séries : ① $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ ② $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Vérifier que la série entière ① diverge sur son cercle d'incertitude, que la série entière ② converge sur ce cercle. Étudier la nature de la série ③ pour $x = 1$ puis $x = -1$.

Exemple 3. ✎ Montrer que si $\sum a_n x^n$ est semi-convergente, alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $|x|$.

1.3 Critère de d'Alembert et rayon de convergence

Méthode 1. Obtenir le rayon de convergence

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, on utilise souvent le critère de d'Alembert des séries numériques, en posant $u_n = a_n z^n$ (ou pour des choix différents de u_n si des a_n sont nuls).
Lorsque $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(z)$, la série converge lorsque $\ell(z) < 1$ et diverge lorsque $\ell(z) > 1$.

Exemple 4. ✎ Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ ② $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ ④ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ ⑤ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n$ $(a \in \mathbb{C})$

1.4 Rayon de convergence et opérations

Proposition 3. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Soit λ un réel. Alors :

- ⋆ $\sum (a_n + b_n) x^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. (avec égalité si $R_a \neq R_b$).
- ⋆ $\sum \lambda a_n x^n$ est de rayon de convergence $R = R_a$.

En particulier, l'ensemble des séries entières à coefficients dans $\mathbb{K}$, et de rayon de convergence supérieur ou égal à $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Découle de la structure d'espace vectoriel des séries numériques convergentes. □

Exemple 5. ✎ En déduire le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n) x^n$.

2. Propriétés de la somme d'une série entière réelle

2.1 Continuité

Proposition 4. Continuité

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ à coefficients réels, et de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Alors la somme de cette série est une fonction continue sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

Démonstration. Soient $r \in [0\,;R[$ et $a \in]-r\,;r[$. $\forall N \in \mathbb{N}$, on note $S_N :]-R\,;R[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.

On va vérifier la définition de $S(x) \xrightarrow[x\to a]{} S(a)$. On fixe $\varepsilon > 0$.

D'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in]-r\,;r[$, $|S(x)-S(a)| \leqslant \underbrace{|S(x) - S_N(x)|}_{①} + \underbrace{|S_N(x) - S_N(a)|}_{③} + \underbrace{|S_N(a) - S(a)|}_{②}$.

① $|S(x) - S_N(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|\, r^n < \frac{\varepsilon}{3}$ à partir d'un certain N_1 car $S(r)$ converge absolument.

② $|S_N(a) - S(a)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ à partir d'un certain N_2 car $S(a)$ converge.

③ soit $N \geqslant \max(N_1, N_2)$. On a $|S_N(x) - S_N(a)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ dès que $|x - a| < \delta$, pour un certain $\delta > 0$, car la fonction polynôme S_N est continue en a.

Ainsi, il existe bien δ, tel que pour tout x vérifiant $|x - a| < \delta$, $|S(x) - S(a)| < \varepsilon$ □

2.2 Intégration

Proposition 5. Intégration terme à terme

Soit la série entière à coefficients réel $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Alors

$$\forall x \in \left]-R\,;R\right[,\quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

et le rayon de convergence de la série définie par le membre de droite est R également.

Démonstration. Montrons d'abord que le rayon de convergence de la série du membre de droite est R :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{a_n}{n+1}\right| \leqslant |a_n|$ donc son rayon de convergence est au moins R par comparaison.

Si $|x| > R$, $\frac{|a_n|}{n+1}\left|\frac{x}{R}\right|^n R^n \longrightarrow +\infty$ par croissance comparée. La série diverge, son rayon de convergence est R.

Étant continue sur $\left]-R\,;R\right[$, la somme est intégrable sur l'intervalle $[0\,;x]$. De plus, $\forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right| &\leqslant \left|\int_0^x \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right) \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^x \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t\right| + \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right| \\
&\leqslant |x| \cdot \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \cdot |x|^n + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right|
\end{aligned}$$

Enfin, les termes du membre de gauche tendent vers 0 car ce sont les restes de séries convergentes. □

Exemple 6. Trouver le rayon de convergence et la somme de :

① $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ ② $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ③ $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2n - 1)x^n$

On décomposera les coefficients polynomiaux, dans la base $\{1, (n+1), (n+1)(n+2), (n+1)(n+2)(n+3), \dots\}$.

3. Dérivation, application aux équations différentielles

3.1 Dérivation

Proposition 6. Dérivation terme à terme

Soit une série entière à coefficients réel $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.
La somme S de cette série définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-R\,;R\right[$, et

$$\forall x \in \left]-R\,;R\right[,\quad S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

où la série définie par le membre de droite est de rayon de convergence R également.

Démonstration. On démontre que la série du membre de droite a bien pour rayon de convergence R (comme dans la preuve de la proposition 5). On lui applique alors la proposition 5, ce qui prouve le résultat. □

Exemple 7. ✎ Déterminer la somme et le rayon de convergence des séries

① $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ ② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ ③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ ④ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} x^n$

Certains coefficients, sous forme de fractions rationnelles, nécessiteront une décomposition en éléments simples.

3.2 Unicité des coefficients d'un développement en série entière

Proposition 7. Unicité des coefficients

Soit une série entière à coefficients réel $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \text{ où } S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ainsi, deux séries entières qui coïncident sur un intervalle ouvert contenant 0 ont les même coefficients.

Démonstration. S'obtient en itérant la proposition 6 de dérivation terme à terme. □

Corollaire 8. Soit une série entière à coefficients réel $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$.

- ⋆ la somme S de la série est paire si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$.
- ⋆ la somme S de la série est impaire si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0$.

Démonstration. Pour le cas pair par exemple, on a : $0 = \sum a_n x^n - \sum a_n (-x)^n = \sum 2a_{2n+1} x^{2n+1}$, d'où l'on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$ par identification. □

3.3 Application aux équations différentielles

Méthode 2. Séries entières et équation différentielles

Les séries entières peuvent permettre d'obtenir une expression d'une solution d'une équation différentielle que l'on ne sait pas résoudre autrement :

① on cherche une solution de la forme $S(x) = \sum a_n x^n$ en substituant dans l'équation.

② après changement d'indices et identification, on trouve une relation de récurrence entre les coefficients.

③ les conditions initiales permettent d'obtenir les premiers coefficients.

④ il reste alors à étudier le rayon de convergence de la série solution.

Remarque 2. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 est *développable en série entière en* x_0 s'il existe une série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence non nul telle que :

$$\forall x \in I \cap]x_0 - R\,; x_0 + R[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$$

La méthode précédente permet de trouver le développement en série entière d'une fonction en 0, pourvu que l'on trouve une équation différentielle à coefficients polynomiaux satisfaite par la fonction.

Exemple 8. ✎ Trouver le développement en série entière en 0 de exp.

Vérifier que ce développement a un rayon de convergence infini.

Expliquer pourquoi on note de manière identique l'exponentielle complexe et réelle.

Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction cosinus.

Exemple 9. ✎ Obtenir le développement en série entière en 0 de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 10. ✎ On considère l'équation différentielle : $xy'' + 2y' + xy = 0$ où $x \in]0\,; \pi[$.

① Chercher une solution développable en série entière y_0.

② Chercher, par la méthode de la variation de la constante, une solution de la forme $y_1 : x \mapsto c(x) y_0(x)$.

③ Expliciter ces solutions.

④ Conclure en admettant que l'espace des solutions est de dimension 2.

4. Développements, applications aux séries numériques

4.1 Spécialisation

MÉTHODE 3.

En évaluant correctement certaines séries entières, on obtient les valeurs de séries numériques remarquables.

EXEMPLE 11. Établir la convergence et calculer les sommes des séries numériques :

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ ② $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n)!}$ ③ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+2}{n!} 2^n$ Pour les coefficients de la forme $P(n)/n!$ (dernière situation), on pensera à écrire le polynôme au dénominateur $P(X)$ dans la base $\{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \ldots\}$ et à utiliser le développement de l'exponentielle.

4.2 Théorème de convergence radiale

THÉORÈME 9. CONVERGENCE RADIALE D'ABEL

Soit une série entière à coefficients réel $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ et de somme S.
Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge, alors S est continue sur $[0\,;R]$: $\displaystyle\lim_{x\to R^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Démonstration. Quitte à poser $X = x/R$, on peut réduire le problème au cas où $R = 1$. De même, en étudiant $S(x) - \sum a_n$, on peut également supposer que $S(1) = 0$. Il suffit donc de démontrer : $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note S_N la N-ème somme partielle de $\sum a_n$, et $S_{-1} = 0$. On a :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0\,;1[,\ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=-1}^{N-1} S_n x^{n+1} = S_N x^N + (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n$$

D'où, lorsque N tend vers l'infini : $S(x) = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $S_n \longrightarrow 0 = \sum a_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent : $|S(x)| \leqslant (1-x)\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + (1-x)\left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{} S_n x^n\right| \leqslant (1-x)\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\displaystyle\sum_{n=N+1}^{} x^n$.

Finalement $|S(x)| \leqslant (1-x)\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2} x^N (1 - x^{N+1})$.

Pour x assez proche de 1, le premier terme du membre de droite est plus petit que $\varepsilon/2$, donc $|S(x)| \leqslant \varepsilon$. □

REMARQUE 3. De même, si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$ converge, S est continue sur $[-R\,;0]$: $\displaystyle\lim_{x\to -R^+} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$.

EXEMPLE 12. ✎ En appliquant le théorème de convergence radiale à arctan, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

EXEMPLE 13. ✎ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

4.3 Développements de référence

Remarque 4. Il ne faut pas confondre le développement en série entière en zéro d'une fonction avec son développement limité à l'origine, même si les termes généraux sont les mêmes : la série entière est une formule valable globalement sur l'intervalle ou le disque de convergence, alors que le développement limité n'a qu'une portée locale, au voisinage de 0.

Le tableau suivant consigne les développements en série de référence, et leurs rayons de convergence (« R.C. ») :

À savoir	R.C.	Développement en série entière	Méthode
♡	1	$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	exemple 1
	1	$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$x \to -x$
♡	1	$\longrightarrow \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	intégration
	1	$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$	$x \to -x^2$
	1	$\longrightarrow \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	intégration
♡	∞	$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$	exemple 8
♡	∞	$\longrightarrow \quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
♡	∞	$\longrightarrow \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$
♡	∞	$\longrightarrow \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$\cos(x) = \mathrm{ch}(\mathrm{i}x)$
♡	∞	$\longrightarrow \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\sin(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(\mathrm{i}x)}{i}$
♡	1 [(1)]	$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	exemple 9

(1). le rayon de convergence de la série est ∞ lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$ (cas d'une série finie).

Bilan du § 22

Prérequis

① Suites : §8 Suites .... ☐
② Séries numériques : §15 Séries numériques .... ☐
③ Développements limités (les formules sont les mêmes !) : §14 Développements limités .... ☐

Objectifs prioritaires

① connaître la définition du rayon de convergence (proposition 2) .... ☐
   (a) majorer ou minorer un rayon de convergence avec le lemme 1 d'Abel (exemple 3) .... ☐
   (b) obtenir un rayon de convergence avec le critère de d'Alembert (méthode 1) .... ☐
   (c) savoir refaire l'exercice 1 et les exemples 4 .... ☐
② connaître et savoir utiliser le théorème d'intégration termes à termes (section 2.2) .... ☐
③ connaître et savoir utiliser le théorème de dérivation termes à termes (section 3.1) .... ☐
④ solutions développables en série entière d'une équa. diff. (méthode 2 et exemple 10) .... ☐
   (a) exercices 11 .... ☐
⑤ connaître les applications au calcul de série numériques 4 .... ☐
   (a) connaître et savoir utiliser le théorème de convergence radiale (section 4.2) .... ☐
   (b) évaluation de séries entières (section 4.1) .... ☐
   (c) exercices 15 et 10 .... ☐
⑥ connaître les développements en série entière des fonctions de référence (section 4.3) .... ☐
   (a) voir par exemple les exercices 3 et 6 .... ☐

Objectifs secondaires

① connaître le résultat de continuité de la somme d'une série entière (proposition 4) .... ☐
② savoir traiter directement l'exercice 8 (gros classique) .... ☐
③ savoir retrouver les développements d'exponentielle et $(1+x)^\alpha$ (exemples 8 et 9) .... ☐

Approfondissement

① comprendre les démonstrations des propositions 5, 4 et 9 .... ☐

TD du § 22

Exercice 1. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\ln(n)} z^n$ ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\operatorname{sh} n)^a} z^n : a \in \mathbb{R}$ ③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n+n} z^n$ ④ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) z^n$ ⑤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n$ ⑥ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^n$

⑦ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$: a_n n-ème décimale de π.

Exercice 2. Série entières : rayon de convergence et somme

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n+\frac{1}{n}\right) x^n$ ③ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ ④ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ ⑤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$

Exercice 3. Développement en série entière en 0

Développer en série entière en 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction

① $f : x \mapsto \ln(x^2-5x+6)$ ② $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ ③ $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Rayon de convergence et somme de séries entières ATS 2006

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière : ① $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ ② $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3+n^2+1}{n^2+n} x^n$

Exercice 5. Rayon de convergence et calcul d'une série entière ATS 2013

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$

Exercice 6. Prolongement lisse et série entière

Montrer que $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Inégalité et série entière

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^n > \dfrac{n^n}{n!}$.

Exercice 8. Série harmonique alternée ATS 2011

Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n}$.

Exercice 9. Séries jumelles et séries entières

Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!}$

Exercice 10. Fonction génératrice d'une série numérique

On souhaite calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et considère la fonction (génératrice) $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

① Calculer le rayon de convergence de la série entière qui définit f.
② Montrer que $\forall x \in]0\,;4[$, $(\star)$: $(4x-x^2)f'(x)-(2+x)f(x)+2=0$.
③ Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\star)$ sur $]0\,;4[$.
④ Trouver, par la méthode de variation de la constante, une solution particulière.
Pour intégrer l'expression $\dfrac{-2}{x}\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}$, on procédera au changement de variables $y=\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}$.
⑤ Expliciter la fonction f, puis calculer S

Exercice 11. Équation différentielle, série entière et carré d'arc sinus

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'=2$ en cherchant des solutions développables en séries entières. Déterminer leur rayon de convergence.

En déduire le développement en séries entières de la fonction $x\mapsto (\arcsin(x))^2$

Exercice 12. Valeur du sinus intégral en 1

On cherche à donner une valeur approchée de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

① Justifier l'existence de l'intégrale I.

② Donner la somme et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction intégrée.

③ Montrer que $I=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}$.

Vérifier : $\forall N\in\mathbb{N},\ \left|I-\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}\right|\leqslant\frac{1}{(2N+3)!(2N+3)}$.

④ En déduire une fraction rationnelle qui approche I à 10^{-4} près.

Exercice 13. Séries entières et séries numériques

Montrer la convergence et calculer la somme de la série

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$ ② $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n+2}{4^n}$ ③ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(k^2+1)2^k}{k!}$

Exercice 14. Formule de Cauchy

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.

On note f la somme de la série sur son disque ouvert de convergence.

Démontrer que $\forall r\in]0\,;R[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_n r^n=\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 15. Somme d'une série numérique via une équation différentielle

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, on note R son rayon de convergence et f sa somme.

① Déterminer R.

② Trouver une équation différentielle satisfaite par f et en déduire f.

③ Calculer, en justifiant : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.