§ 20 : Intégrales généralisées

1. Différents types d'intégrales généralisées

1.1 Intégrales généralisées sur un intervalle non borné

Remarque 1. Les résultats de cette section concernent les intégrales de fonctions définies sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$. Les énoncés s'adaptent facilement au cas d'un intervalle de la forme $]-\infty\,;a]$.

Définition 1. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$. Lorsque la limite suivante existe, on pose $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\;\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\;\mathrm{d}t$

Le membre de droite est appelé *intégrale impropre convergente* en $+\infty$. On parle aussi d'intégrale *généralisée*.

Lorsque la limite n'existe pas, l'*intégrale impropre* : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite *divergente* en $+\infty$.

Proposition 1. Intégrales de référence en l'infini

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge (en $+\infty$) si et seulement si $\alpha > 1$.

L'intégrale géométrique $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge (en $+\infty$) si et seulement si $a > 0$.

Démonstration. ✎ Rechercher les primitives et appliquer la définition 1.

1.2 Intégrales généralisées sur un intervalle borné

Remarque 2. Les résultats de cette section concernent les intégrales de fonctions définies sur un intervalle du type $[a\,;b[$. Les énoncés s'adaptent facilement au cas d'un intervalle de la forme $]b\,;a]$.

Définition 2. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\,;b[$. Lorsque la limite suivante existe, on pose $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Le membre de droite est appelé *intégrale impropre convergente* en b. On parle aussi d'intégrale généralisée.

Lorsque la limite n'existe pas, l'*intégrale impropre* : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite *divergente* en b.

Remarque 3. Soit u une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ et prolongeable par continuité en b. Notons $\tilde{u}$ son prolongement sur $[a\,;b]$. Alors l'intégrale de u sur $[a\,;b]$ est convergente et : $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{u}(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 1. ✎ Donner la nature de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Proposition 2. Intégrales de référence en zéro

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge (en zéro) si et seulement si $\alpha < 1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ du logarithme converge (en zéro).

Démonstration. Calculer les primitives et utiliser la définition 2.

1.3 Propriétés de l'intégrale et convergence

Proposition 3. Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a\,;b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

⋆ Relation de Chasles : Soit $\alpha \in [a\,;b[$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$

⋆ Linéarité : si f et g sont d'intégrales convergentes sur $[a\,;b[$, alors l'intégrale de $\lambda f + g$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) converge et $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f + g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Passage à la limite et propriétés semblables sur un segment. □

Exemple 2. Quitte à utiliser la relation de Chasles, on peut définir des intégrales doublement impropres en se ramenant à l'étude de deux intégrales impropres. Étudier la convergence de :

① $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ ② $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln t|}}$ ③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{d}t$

2. Intégrales de fonction positives

2.1 Critère de comparaison

Proposition 4. Comparaison

Soient f et g deux fonctions positives et continues par morceaux sur $[a\,;b[$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On suppose que sur $[a\,;b[$, on a $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ ou bien $f(t) = \mathrm{o}_b(g(t))$.
On a les implications suivantes :
① si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. ② si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration. L'idée est la même que pour les séries : pour le cas ① par exemple, l'ensemble des $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [a\,;b[$ est majorée, donc admet une borne supérieure L qui est la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers a, car F est croissante. □

Exemple 3 (Fonction Gamma d'Euler). ✎ Montrer la convergence, pour tout $x > 0$, de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Calculer $\Gamma(1)$. Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.

2.2 Critère d'équivalence

Proposition 5. Équivalence

Soient f et g deux fonctions positives et continues par morceaux sur $[a\,;b[$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$ alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Démonstration. Si $f(t) \sim g(t)$ en b, il existe un $a_0 \in [a\,;b[$ à partir duquel $\frac{1}{2}g(t) \leqslant f(t) \leqslant 2g(t)$. On peut utiliser la proposition 4 de comparaison. Si l'intégrale de g converge, celle de f converge. Réciproquement si l'intégrale de f converge, alors celle de $\frac{1}{2}g$, donc de g, converge également. □

Exemple 4. ✎ Nature et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

2.3 Convergence absolue

Définition 3. Soit f une fonction et continue par morceaux sur l'intervalle $[a\,;b[$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

f est *intégrable* sur $[a\,;b[$ (d'intégrale *absolument* convergente) si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Proposition 6. Lien entre intégrabilité et convergence

Si une fonction est intégrable sur $[a\,;b[$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, son intégrale est convergente sur $[a\,;b[$.

Démonstration. Comme pour les séries, on définit pour $t \in [a\,;b[$ les fonctions $f^+(t) = \max_{[a;b[}(f(t), 0)$ et $f^-(t) = \max_{[a;b[}(-f(t), 0)$ et on vérifie qu'elles sont continues par morceaux et positives, donc d'intégrales convergentes par comparaison. On conclut en notant que $f = f^+ - f^-$, par linéarité. $\square$

Remarque 4. En particulier, pour prouver l'intégrabilité d'une fonction sur $[a\,;b[$, il suffit d'appliquer les propositions 4 ou 5 à $|f|$ et une fonction g bien choisie.

Exemple 5. ✎ Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}$. En déduire : $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ non intégrable.

3. Méthodes de calcul

3.1 Intégration par parties

L'intégration par parties permet d'établir la convergence de certaines intégrales. Par passage à la limite :

Proposition 7. Intégration par parties généralisée

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a\,;b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si $\displaystyle\lim_{t\to b} u(t)v(t)$ existe, alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left(\lim_{t\to b} u(t)v(t)\right) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 6. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Cette intégrale convergente, mais pas absolument convergente (exemple 5), est qualifiée de *semi-convergente*.

3.2 Changement de variable

Proposition 8. Changement de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a\,;b[, I)$ une fonction telle que $\varphi(a) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{t\to b} \varphi(t) = \beta$, et vérifiant $\varphi([a\,;b[) \subset I$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent :

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. On passe à la limite dans le théorème de changement de variable sur un segment. $\square$

Exemple 7. Établir la convergence de l'intégrale suivante, puis la calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Bilan du § 20

Prérequis

① Intégration sur un segment : tout ! §12 Intégration .... ☐

② Séries numériques : établir une convergence §15 Séries numériques .... ☐

Objectifs prioritaires

① définition, exemples de référence d'intégrales généralisées convergente en l'infini (section 1.1) .... ☐

② définition, exemples de référence d'intégrales généralisées convergente en b (section 1.2) .... ☐

③ connaître le critère de comparaison d'intégrales de fonctions positives (section 2.1) .... ☐

④ connaître le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives (section 2.2) .... ☐

⑤ connaître la convergence absolue, savoir qu'elle entraîne la convergence (section 2.3) .... ☐

⑥ connaître le théorème d'intégration par parties généralisée (section 3.1) .... ☐

⑦ théorème de changement de variable généralisé (hypothèses !) (section 3.2) .... ☐

⑧ connaître la relation de Chasles (section 1.3) .... ☐

Approfondissement

① notion d'intégrale semi-convergente (exemple 5) .... ☐

TD du § 20

Exercice 1. Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de l'intégrale :
① $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{\frac{3}{2}}+x\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ ② $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ③ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$ ④ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ ⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^x\,\mathrm{d}x$
⑥ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^{-x}}$ ⑦ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x-\sin x}{x\ln(\cos(x))}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2. Calcul d'intégrales convergentes
Montrer que l'intégrale suivante converge, et calculer sa valeur :
① $\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$. ② $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$: poser $t=\dfrac{1}{x}$. ③ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}$ (poser $t=\mathrm{e}^x+1$)
④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra poser $t=1/x$) ⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-x\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ (intégrer par parties)
⑥ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$. ⑦ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$ où $n>1$. ⑧ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
⑨ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$ (poser $u=x^4$) ⑩ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}t$ (poser $\theta=\arcsin(x)$)

Exercice 3. Intégrabilité
Étudier l'intégrabilité de l'application f sur l'intervalle I :
① $f : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$, $I=]0\,;+\infty[$ ② $f : x\mapsto x+1-\sqrt{x^2+2x}$, $I=[1\,;+\infty[$

Exercice 4. Nature d'une intégrale paramétrée ATS 2013
Discuter la nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. Intégrer les puissances du logarithme.
Pour tout entier naturel n, on définit $I_n=\displaystyle\int_0^1 \big(\ln x\big)^n\,\mathrm{d}x$.

Montrer qu'il s'agit d'intégrales convergentes et calculer I_n.

Exercice 6. Convergence d'intégrale et développements limités
Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)$ existe. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 7. Valeur principale et convergence d'intégrale
L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ? Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Commenter le résultat.

Exercice 8. Intégrales de Bertrand
On souhaite discuter, en fonction des réels α et β, de la convergence des intégrales

$$I_{\alpha,\beta}=\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \text{ et } J_{\alpha,\beta}=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}.$$

① Que dire de $I_{\alpha,\beta}$ lorsque $\beta=0$? Lorsque $\alpha=0$?
② Montrer la convergence de $I_{\alpha,\beta}$ lorsque $\alpha>1$, et sa divergence pour $\alpha<1$.
③ Au moyen d'un changement de variable, traiter le cas $I_{1,\beta}$.
④ Au moyen d'un changement de variable, discuter de la convergence de $J_{\alpha,\beta}$.
⑤ Discuter la convergence des séries de Bertrand : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$.

Exercice 9. Intégrales à paramètres ATS 2013
Établir la convergence de $I_{p,n}=\displaystyle\int_0^1 x^n\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$, et calculer cette intégrale. (n et p sont des entiers naturels)

Exercice 10. Intégrale de Dirichlet

On va établir la convergence, et calculer la valeur, de l'intégrale de Dirichlet : $D = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t$

① Établir la convergence de D (par une intégration par parties), ainsi que celle de J_n et K_n pour $n \in \mathbb{N}$.

② Soit $g :]0\,;\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$.
Montrer que g admet un développement limité d'ordre 1 en 0 que l'on précisera.
En déduire que g se prolonge par continuité en 0 en une fonction de $\mathcal{C}^1([0\,;\frac{\pi}{2}])$, que l'on note encore g.

③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ K_n - J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t$.
Au moyen d'une intégration par parties, vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n - J_n = 0$

④ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} - J_n = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\big((2n+2)t\big)\,\mathrm{d}t$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

⑤ Au moyen d'un changement de variable, prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

⑥ À partir de ce qui précède, calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet.