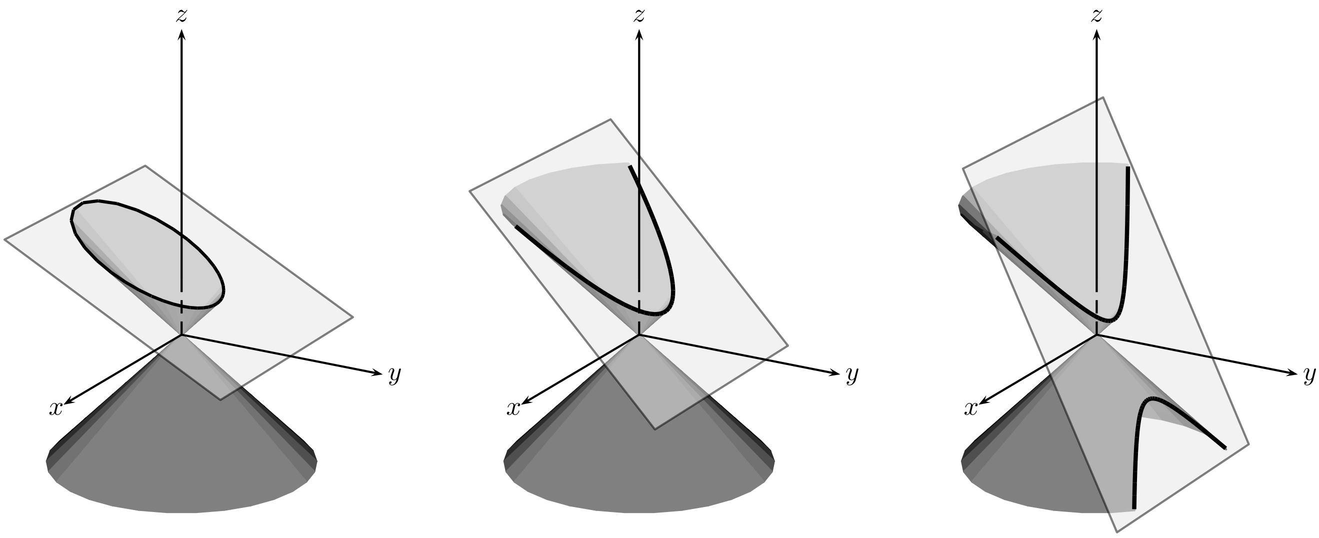
§ 17 : Coniques

1. Définition et premières propriétés des coniques

1.1 Coniques et (doubles) cônes

Étymologiquement, les *coniques* sont les courbes obtenues par intersection d'un « double » cône et d'un plan. Il s'agit des paraboles, des hyperboles et des ellipses.

On a représenté ci-dessous un cône obtenu par rotation d'une droite $\mathcal{G}$ non parallèle à (Oz), passant par l'origine, autour de l'axe (Oz), tronqué suivant un plan ne passant pas par l'origine (le sommet du cône).



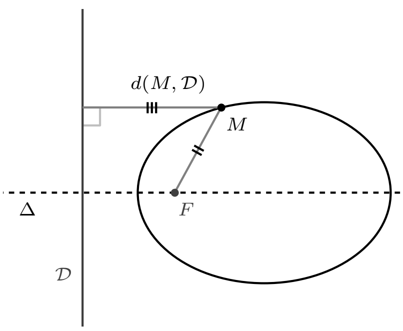
1.2 Définition monofocale

Définition 1. Soit e un nombre réel strictement positif, $\mathcal{D}$ une droite du plan et $F \notin \mathcal{D}$ un point du plan.
La *conique* $\mathcal{C}(F, \mathcal{D}, e)$ de *foyer* F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, est l'ensemble des points

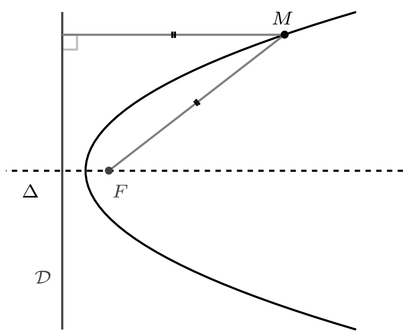
$$\boxed{\mathcal{C}(F, \mathcal{D}, e) = \{M \in P,\ MF = e \times \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}}$$

- ⋆ si $0 < e < 1$, la conique est une *ellipse*.
- ⋆ si $e = 1$, la conique est une *parabole*.
- ⋆ si $e > 1$, la conique est une *hyperbole*.

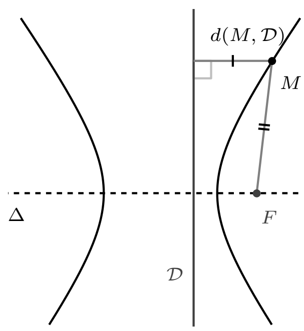
L'*axe focal* Δ de la conique est la droite perpendiculaire à la directrice $\mathcal{D}$ qui passe par le foyer F.



Ellipse : $0 < e < 1$



Parabole : $e = 1$

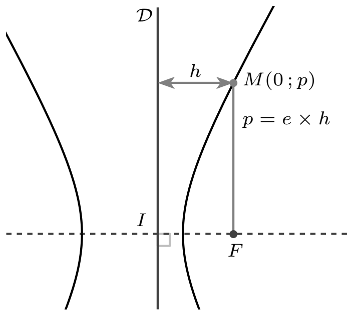


Hyperbole : $e > 1$

Définition 2. Le *paramètre* p d'une conique $\mathcal{C}(F, \mathcal{D}, e)$ est la distance MF où M est un point d'intersection de la conique $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à la directrice $\mathcal{D}$ passant par le foyer. On a :

$$\boxed{p = e \times d(F, \mathcal{D}) = eh}$$

où $h = d(F, \mathcal{D})$.



Remarque 1. Une conique admet son axe focal comme axe de symétrie. $(M(x\,;y) \in \mathcal{C} \implies M'(x\,;-y) \in \mathcal{C})$.

2. Paraboles

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{P}$ désigne une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ (et d'excentricité $e = 1$).

2.1 Caractéristiques d'une parabole

On note I le projeté orthogonal du foyer sur la directrice.

Définition 3. Le sommet S de la parabole $\mathcal{P}$ est le milieu du segment d'extrémités : le foyer F, et le projeté orthogonal I du foyer sur la directrice. Il vérifie $SI = IF$ donc $S\mathcal{P}$.

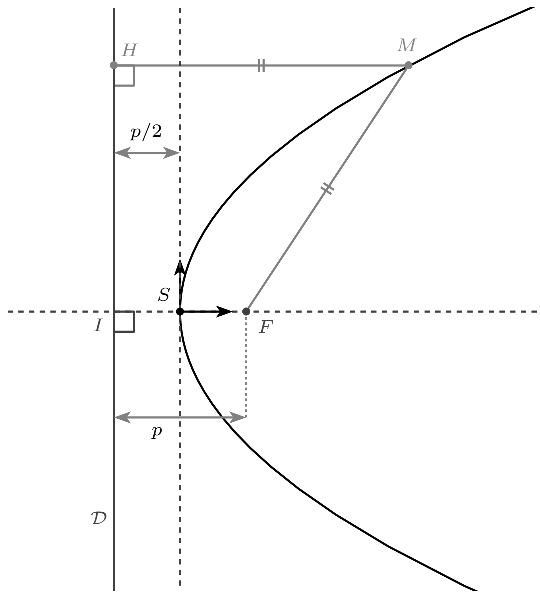
On étudie la parabole $\mathcal{P}$ dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = (S\,; \vec{u}_{\mathcal{P}}\,; \vec{v}_{\mathcal{P}})$, où $\vec{u}_{\mathcal{P}}$ est unitaire, dirigé par l'axe focal, et de même sens que $\overrightarrow{IF}$.

Proposition 1. Dans un repère orthonormé direct, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ est une parabole :

- ⋆ de directrice d'équation : $x = -\frac{p}{2}$
- ⋆ de foyer : $F(\frac{p}{2}\,;0)$
- ⋆ d'excentricité : $e = 1$
- ⋆ distance foyer - directrice : $d(F, \mathcal{D}) = h$
- ⋆ de paramètre : $p = eh = h$
- ⋆ de sommet : $S(0\,;0)$
- ⋆ d'équation : $\boxed{y^2 = 2px}$
- ⋆ de représentations paramétrique :

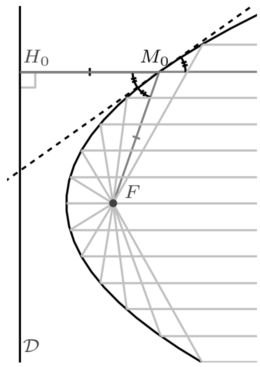
$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = t^2/(2p) \\ y = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}}$$

ou $$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}}$$



Réciproquement, dans $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ une parabole a pour équation $y^2 = 2px$.

2.2 Tangentes d'une parabole



Proposition 2.

La tangente au point $M_0(x_0\,;y_0)$ à une parabole d'équation $y^2 = 2px$ a pour équation cartésienne $y_0y = p(x + x_0)$

Démonstration. ✎ utiliser par exemple une représentation paramétrique. □

Exemple 1. Soit M_0 un point de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et H_0 son projeté orthogonal sur la directrice. Vérifier que la tangente en M_0 à la parabole est la médiatrice de $[H_0F]$. En déduire que la tangente T_0 en M_0 est une bissectrice de (M_0H_0) et (FM_0).
Applications : antennes paraboliques, phares paraboliques, fours solaires …

3. Ellipses

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{E}$ désigne une ellipse de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ (et d'excentricité $e \in]0\,;1[$).

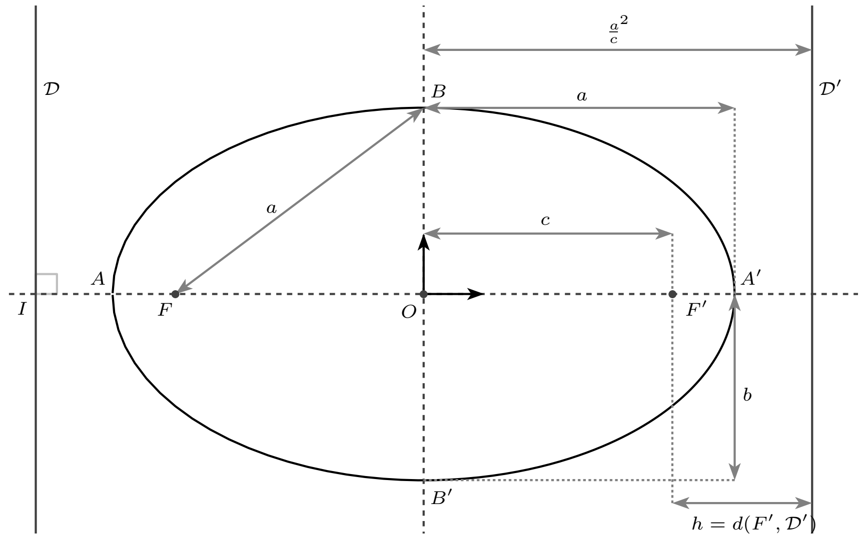
3.1 Caractéristiques d'une ellipse

On note I le projeté orthogonal du foyer sur la directrice.

Définition 4. Étant donnée une ellipse $\mathcal{E}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, on définit les sommets A et A' comme les barycentres respectifs de $\{(F,1);(I,-e)\}$ et $\{(F,1);(I,e)\}$.

Ce sont deux points de l'ellipse et on note O le milieu de $[AA']$.

On étudie l'ellipse $\mathcal{E}$ dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = (O\,;\vec{u}_{\mathcal{E}}\,;\vec{v}_{\mathcal{E}})$, où le vecteur $\vec{u}_{\mathcal{E}}$ est dirigé par l'axe focal et de même sens que $\overrightarrow{IF}$.



Proposition 3. Dans un repère orthonormé direct, la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $0 < b \leqslant a$, est une ellipse

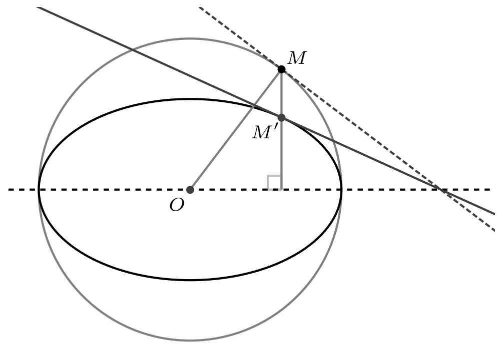
- ⋆ de demi grand axe (ou demi axe focal) $a = OA = OA' = BF = BF' = B'F = B'F' = \dfrac{p}{1-e^2}$
- ⋆ demi petit axe (ou demi axe non focal) $b = OB = OB' = a\sqrt{1-e^2} = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$
- ⋆ d'excentricité : $0 < e < 1$ et de paramètre p.
- ⋆ de centre de symétrie : $O(0\,;0)$
- ⋆ de demi grand axe (ou demi axe focal) $a = OA = OA' = BF = BF' = B'F = B'F' = \dfrac{p}{1-e^2}$
- ⋆ de distance focale $c = OF = OF' = ae = \dfrac{pe}{1-e^2}$

- ⋆ de sommets (intersection de l'axe focal Δ et de l'ellipse $\mathcal{E}$) : $A(-a\,;0)$, et $A'(a\,;0)$.
- ⋆ d'intersections de l'axe non focal Δ' et de l'ellipse $\mathcal{E}$: $B(0\,;b)$ et $B'(0\,;-b)$.
- ⋆ de foyers : $F(-c\,;0)$, et $F'(c\,;0)$.
- ⋆ de directrices $\mathcal{D}$: $x = -\frac{a^2}{c}$, et $\mathcal{D}'$: $x = \frac{a^2}{c}$.
- ⋆ vérifiant la relation de Pythagore du triangle OBF : $a^2 = b^2 + c^2$.
- ⋆ d'équation : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$
- ⋆ de représentation paramétrique : $\boxed{\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}}$

Réciproquement, l'équation d'une ellipse dans $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Exemple 2. ✎ Donner l'excentricité, le paramètre et la distance focale de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Exemple 3. ✎ une *affinité* orthogonale d'axe (Ox) et de rapport k est une transformation du plan qui à $M(x\,;y)$ associe $M'(x\,;ky)$. Montrer que l'image du cercle de centre O et de rayon $a > 0$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$ $(b > 0)$ est une ellipse.
En déduire une méthode de construction d'une tangente en un point à une ellipse donnée.



3.2 Tangentes d'une ellipse

Proposition 4. La tangente au point $M_0(x_0\,;y_0)$ à une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est la droite d'équation cartésienne $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

3.3 Définition bifocale d'une ellipse

Proposition 5. Soit un réels $a > 0$ et deux points F et F' du plan tels que $2a > FF'$.
L'ensemble $\mathcal{E} = \{MF + MF' = 2a\}$ est l'ellipse de foyers F et F', de distance focale $c = \frac{1}{2}FF'$ et de demi grand axe a.

Démonstration. Travailler dans le repère orthonormé direct d'origine le milieu du segment $[FF']$ et de premier vecteur colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OF}$. Montrer que $MF + MF' = 2a \iff MF - a = a - MF' \iff -\frac{c}{a} = MF' - MF$ (élever au carré pour la dernière équivalence). Puis combiner pour obtenir $MF = e(\frac{a^2}{c} - x)$ qui est e fois la distance à la directrice d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. □

Exemple 4. ✎ Soit $\mathcal{C}$ un cercle et M un point intérieur au cercle. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{C}$ et contenant M ?

4. Hyperboles

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{H}$ désigne une hyperbole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ (et d'excentricité $e > 1$).

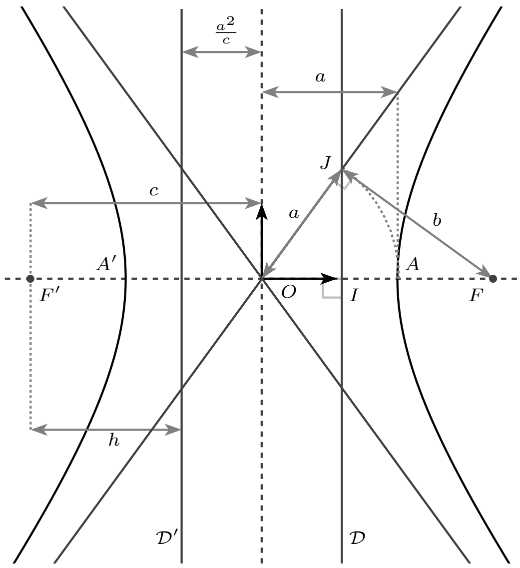
4.1 Caractéristiques d'une hyperbole

On note I le projeté orthogonal du foyer sur la directrice.

> Définition 5. Étant donnée une hyperbole $\mathcal{H}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, on définit les sommets A et A' comme les barycentres respectifs de $\{(F,1);(I,-e)\}$ et $\{(F,1);(I,e)\}$.
>
> Ce sont deux points de l'hyperbole et on note O le milieu de $[AA']$.
>
> On étudie l'hyperbole $\mathcal{H}$ dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{\mathcal{H}} = (O\,;\vec{u}_{\mathcal{H}}\,;\vec{v}_{\mathcal{H}})$, où le vecteur $\vec{u}_{\mathcal{H}}$ est dirigé par l'axe focal et de même sens que $\overrightarrow{IF}$.

Proposition 6. Dans un repère orthonormé direct, la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < a < b$ est une hyperbole

- ⋆ d'excentricité : $e > 1$.
- ⋆ de sommets : $A(a\,;0)$, et $A'(-a\,;0)$.
- ⋆ de foyers : $F(c\,;0)$, et $F'(-c\,;0)$.
- ⋆ de directrices $\mathcal{D} : x = \dfrac{a^2}{c}$, $\mathcal{D}' : x = -\dfrac{a^2}{c}$.
- ⋆ d'asymptotes $\mathcal{A} :\ y = \dfrac{b}{a}x$ et $\mathcal{A}' : y = -\dfrac{b}{a}x$
- ⋆ vérifiant Pythagore dans OFJ : $c^2 = a^2 + b^2$.
- ⋆ de demi axe focal $a = \dfrac{p}{e^2-1}$
- ⋆ avec $b = a\sqrt{e^2-1} = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$
- ⋆ de distance focale $c = OF = OF' = ae = \dfrac{pe}{e^2-1}$
- ⋆ d'équation : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$
- ⋆ de paramétrage : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \varepsilon a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon \in \{\pm 1\}}$



Réciproquement, une hyperbole a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$.

Remarque 2. Les formules de a, b et c pour l'hyperbole ($e > 1$) s'obtiennent à partir de celles de l'ellipse ($e < 1$) en remplaçant $1 - e^2$ par $e^2 - 1$ (a, b, c sont des nombres strictement positifs).

Exemple 5. ✎ Déduire les propriétés de symétries et les équations des asymptotes au moyen de la représentation paramétrique. Montrer que les asymptotes sont perpendiculaires si et seulement si $e = \sqrt{2}$. On parle alors d'hyperbole *équilatère*.

4.2 Tangentes à une hyperbole

Proposition 7. La tangente au point $M_0(x_0\,;y_0)$ à une hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est la droite d'équation cartésienne $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Remarque 3 (Moyen mnémotechnique). Dans toutes les situations, l'expression des tangentes s'obtient en « dédoublant » l'équation réduite de la conique :

① $x^2 \leftrightarrow x_0 x$ ② $y^2 \leftrightarrow y_0 y$ ③ $2xy \leftrightarrow x_0 y + y_0 x$ ④ $2x \leftrightarrow x_0 + x$ ⑤ $2y \leftrightarrow y_0 + y$

4.3 Définition bifocale d'une hyperbole

Proposition 8. Soit un réel $a > 0$ et deux points F et F' du plan tels que $2a < FF'$.

L'ensemble $\mathcal{E} = \{|MF - MF'| = 2a\}$ est l'hyperbole de foyers F et F', de distance focale $c = \frac{1}{2}FF'$ et de demi grand axe a.

TD du § 17

Exercice 1. Tangentes d'une courbe remarquable `écrit ATS 2012`

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

① Reconnaître cette courbe.
② Donner les composantes d'un vecteur tangente $\vec{T}(t)$ et d'un vecteur normal $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.
③ On considère deux points quelconques $A = M(a)$ et $B = M(b)$ de cette courbe, qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes a et b du paramètre t.
Donner une équation de la droite T_A, tangente au point A à la courbe $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées de l'intersection A' de T_A avec l'axe des abscisses.
De même, donner une équation de la tangente T_B au point B à la courbe $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de l'intersection B' de T_B avec l'axe des abscisses.
④ Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
⑤ Déterminer les coordonnées du point M, intersection des deux tangentes T_A et T_B.
⑥ Comparer les ordonnées des points I et M.
⑦ Déterminer les coordonnées du point C qui appartient à la courbe $\mathcal{P}$ et dont l'ordonnée est égale à celle de I.
⑧ Démontrer que la tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est parallèle à la droite (AB).
⑨ Pour $a = -1$ et $b = 2$, faire une figure comportant $\mathcal{P}$, A, B, A', B', $[AB]$, $T_A = (AA')$, $T_B = (BB')$, I, M, C et T_C.

Exercice 2. Reconnaître une conique

Donner la nature et les éléments géométriques de la conique

① d'équation polaire $r = \dfrac{1}{1+\sin(\theta)}$
② d'équation cartésienne $y^2 = x$.
③ d'équation cartésienne $y = x^2$.
④ d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
⑤ d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.
⑥ d'équation cartésienne $y^2 = x^2 + 1$.
⑦ de foyers $F(2\,;0)$, $F'(-2\,;0)$ et passant par $A(3\,;0)$

Exercice 3. Droite passant par un foyer d'une conique

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un foyer F d'une conique $\mathcal{C}$.

Discuter du nombre de points d'intersections de la conique et de la droite. (on pourra utiliser une équation polaire de la conique dans un repère aproprié)

Démontrer que, lorsque la droite coupe la conique en deux points M et N, la quantité $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN}$ est indépendante de la droite considérée.

Exercice 4. Orthoptique d'une parabole

Quel est l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes d'une parabole, perpendiculaires ?

Exercice 5. Orthocentre d'un triangle sur une hyperbole équilatère

Démontrer que l'orthocentre d'un triangle dont les sommets sont sur une hyperbole équilatère est aussi sur l'hyperbole. On travaillera dans un repère obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ du repère adapté à l'hyperbole.

Bilan du § 17

5. Prérequis

① Fonctions usuelles : tout ! §3 Fonctions usuelles ☐
② Géométrie plane : les droites (parallèles, orthogonales, intersections...) §4 Géométrie plane ☐
③ Courbes paramétrées : en particulier les vecteurs tangents. §5 Courbes paramétrées ☐

Objectifs prioritaires

① Connaître la définition monofocale d'une conique (1.2) ☐
  (a) excentricité e, savoir reconnaître la nature d'une conique selon e (définition 1) ☐
  (b) savoir la définition 2 du paramètre p d'une conique ☐
② connaître la notion de parabole (section 2, formules encadrées) ☐
③ connaître la notion d'ellipse (section 3, formules encadrées) ☐
④ connaître la notion d'hyperbole 4 ☐

Objectifs secondaires

① mémoriser l'équation cartésienne d'une tangente par la remarque 3 sur le « dédoublement » ☐
② Connaître le passage d'un cercle à une ellipse par affinité orthogonale (exemple 3) ☐

Approfondissement

① Définitions bifocales d'une ellipse, d'une hyperbole (section 3.3 et 4.3) ☐
② Les caractéristiques géométriques précises des différentes coniques [formules liant a,b,c,e,p,...] :-) ☐