§ 14 : Développements limités

1. Définition et opérations

1.1 Définition du développement limité d'une fonction

DÉFINITION 1. Soit I un intervalle contenant 0, ou dont une borne contient 0. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$.

On dit que la fonction f admet un *développement limité d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *en* 0 si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, de degré inférieur ou égal à n, tel que

$$\forall x \in I,\ f(x) = P(x) + \mathrm{o}_0(x^n).$$

Le polynôme P est la *partie principale* du développement limité à l'ordre n, l'égalité ci-dessus est le développement limité de f à l'ordre n.

La fonction $\mathrm{o}_0(x^n)$ est le *reste* du développement limité.

REMARQUE 1. De manière équivalente, dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et des coefficients réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ et } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

La partie principale donne une approximation polynomiale de f locale, au voisinage de 0. Elle ne donne aucune indication sur le comportement global de f.

EXEMPLE 1. ✎ Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to 3 - 2x + x^3$ admet un développement limité en 0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donner sa partie principale en fonction de n.

REMARQUE 2. Plus généralement, tout polynôme admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, dont la partie principale est *la troncature au degré* n de P, c'est-à-dire le polynôme obtenu en supprimant les termes de P de degré strictement supérieurs à n : $1 - 2x + 3x^2 + 6x^3 = 1 - 2x + \mathrm{o}_0(x)$.

EXEMPLE 2. ✎ Rappeler la valeur, pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, de $1 + x + \cdots + x^n$.

En déduire l'existence et la partie principale du développement limité en 0 à l'ordre n de $\dfrac{1}{1-x}$.

DÉFINITION 2. Soit I un intervalle contenant x_0, ou dont une borne est x_0. Soit la fonction $f : I \to \mathbb{K}$.

La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si et seulement si $f(x_0 + h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 (par rapport à la variable h).

On abrège parfois « développement limité d'ordre n en x_0 » par « $\mathrm{DL}_n(x_0)$ ».

REMARQUE 3. On énoncera tous les résultats pour des $\mathrm{DL}_n(0)$, pour plus de simplicité, et parce que c'est le cadre le plus fréquent d'application. Pour obtenir les résultats en x_0, remplacer 0 par x_0 et x par $x - x_0$.

1.2 Propriétés des développements limités

PROPOSITION 1. UNICITÉ

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, celui-ci est unique.

Démonstration. Si $f = P + \mathrm{o}_0(x^n) = Q + \mathrm{o}_0(x^n)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on trouve que $P(x) - Q(x) = \mathrm{o}_0(x^n)$ donc $\dfrac{P(x) - Q(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, ce qui implique $\deg P - Q > n$ ou $P - Q = 0$, qui est la seule possibilité : donc $P = Q$ □

Proposition 2. Parité

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0,
- ⋆ si f est paire, alors sa partie principale ne contient que des termes de degrés pairs.
- ⋆ si f est impaire, alors sa partie principale ne contient que des termes de degrés impairs.

Démonstration. Soit $f(x) = P(x)+I(x)+o_0(x^n)$ avec P et I des polynômes respectivement pairs et impairs, de degrés au plus n. En utilisant par avance 5 ③, si f paire on a : $f(-x) = P(x) - I(x) + o_0(x^n) = P(x) + I(x) = f(x)$, par unicité de la partie principale, on a : $I(x) = 0$. On raisonne de même si f est impaire. □

Proposition 3. DL et continuité

Soit I un intervalle et x_0 un réel. Soit la fonction $f : I \to \mathbb{K}$.
La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 : $\forall x \in I,\ f(x) = b + o_0(1)$ si et seulement si
- ⋆ f est continue en x_0, et $f(x_0) = b$. (cas où $x_0 \in I$)
- ⋆ f est prolongeable par continuité en posant $f(x_0) = b$. (cas où $x_0 \notin I$ mais x_0 extrémité de I)

Démonstration. On utilise le fait que $f(x) = b + o_{x_0}(1) \iff f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} b$ □

Proposition 4. DL et dérivabilité

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit la fonction $f : I \to \mathbb{K}$.
La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 : $\forall x \in I,\ f(x) = b+ax+o_0(x)$ si et seulement si f est dérivable en x_0, et $f(x_0) = b$ et $f'(x_0) = a$.

Démonstration. On utilise : $f(x) = b + a(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \iff \dfrac{f(x) - b}{x - x_0} = a + o_{x_0}(1) \xrightarrow[x\to x_0]{} a$ □

Remarque 4. ⚠ Ces résultats ne se généralisent pas pour les dérivées d'ordre supérieur :
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Vérifier que $f(x) = o_0(x^2)$ et en déduire que f se prolonge par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ? Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0, bien qu'elle admette un développement limité d'ordre 2.

1.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 5. Opérations sur les DL

Soient f et g deux fonctions, définies sur un intervalle I, et admettant un développement limité à l'ordre n en 0 : $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o_0(x^n)$ avec $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Alors

① pour tout entier $k \leqslant n$, f admet un développement limité à l'ordre k en 0, dont la partie principale est la troncature au degré k du polynôme P.

② pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie principale est $\lambda P + Q$.

③ fg admet un développement limité d'ordre n, dont la partie principale est la troncature du polynôme PQ à l'ordre n.

④ si $g(0) = 0$, $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n, dont la partie principale est la troncature du polynôme $P \circ Q$ à l'ordre n.

Démonstration. Quitte à considérer $f(x_0 + h)$ et $g(x_0 + h)$, il suffit de prouver la proposition lorsque $x_0 = 0$.

① et ② viennent des propriétés de la relation de prépondérance : proposition 4 du §10 Limites.

③ : $fg - QP = fg - fQ + fQ - QP = f(g - Q) + Q(f - P) = f o_0(x^n) + Q o_0(x^n) = o_0(x^n)$.

④ si $f = x^k$, on a $f \circ g(x) = (Q + o_0(x^n))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^j \times (o_0(x^n))^{k-j} = Q^k + o_0(x^n)$.

Si $n > 0$ et $f = o_0(x^n) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $g(x) = 0 + ax + o_0(x)$ donc $g(x)^n\varepsilon(g(x)) \times \frac{1}{x^n} = a\varepsilon(g(x)) + o_0(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Si $n = 0$, c'est une composition de limites.

Ainsi, $f \circ g = o_0(x^n)$. Par linéarité, on a le résultat pour toute f admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$. □

Exemple 3. ✎ Obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$ et $\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$ (méthode importante pour les DL de quotients)

Exemple 4. ✎ $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $g : x \mapsto x - x^2 + x^3$. Obtenir un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{1}{1+x-x^2+x^3}$ et $\dfrac{x-x^2+x^3}{1-x}$.

2. Formule de Taylor

2.1 Intégrer les développements limités

Proposition 6. Intégrer un DL

Soit une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$\forall x \in I,\ f(x) = P(x) + \mathrm{o}_0(x^n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \mathrm{o}_0(x^n) \text{ où } P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

Alors une primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ dont la partie principale est la primitive de P qui vaut $F(0)$ en 0 :

$$\forall x \in I,\ F(x) = F(0) + \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}_0(x^{n+1}) = F(0) + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right) + \mathrm{o}_0(x^{n+1})$$

Démonstration. On note $Q = F(0) + \int_0^x P$ la primitive de P qui vaut $F(0)$ en 0. Soit $x \in I \setminus \{0\}$. La fonction $t \mapsto F(t) - Q(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;x]$ donc, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|\frac{F(x)-Q(x)}{x}\right| \leqslant \max_{t\in[0;x]} |f(t) - P(t)| \leqslant \max_{t\in[0;x]} |t^n \varepsilon(t)| \leqslant |x|^n \max_{t\in[0;x]} |\varepsilon(t)|$$

où $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et est continue sur $[0\,;x]$. Ainsi, en divisant par $|x^n|$, on prouve que $F(x) - Q(x) = \mathrm{o}_0(x^{n+1})$.

Exemple 5. ✎ À partir des résultats de l'exemple **??** donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\arctan(x)$.

2.2 Formule de Taylor-Young

Proposition 7. Formule de Taylor et Young

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ où I est un intervalle contenant 0. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}_0(x^n) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{o}_0(x^n)$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n, l'idée étant d'appliquer l'hypothèse de récurrence à f' et d'utiliser la proposition 6. □

Exemple 6. ✎ Déterminer la dérivée d'ordre n de exp et en déduire le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction exponentielle. Déterminer de même le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$.

2.3 Dérivation de développements limités

Proposition 8. Dériver les DL

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Si f et f' admettent respectivement des développements limités d'ordre $n+1$ et n en 0, alors la partie principale du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f' est la dérivée de la partie principale du $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de f.

Remarque 5. Cette proposition s'applique en particulier au cas simple où $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$.

3. Applications des développements limités

3.1 Calcul de limites

Les développements limités permettent de lever des formes indéterminées :

Exemple 7. Calculer ① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^3}$ ② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2^x+3^x-5^x)}{2^x+3^x-2\times 5^x}$

3.2 Recherche d'équivalents

Méthode 1.

Soit f définie sur un intervalle I qui contient 0, ou dont une borne est 0. Supposons que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}_0(x^n) \text{ avec les } a_i \text{ non tous nuls.}$$

Si $a_0 \neq 0$, $f(x) \underset{0}{\sim} a_0$. Sinon, en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

Exemple 8. ✎ Trouver un équivalent simple en 0 de $\dfrac{\mathrm{sh}^2(x)-\sin^2(x)}{1-\cos(x^3)}$.

3.3 Équation d'une tangente, position relative avec la courbe

Méthode 2.

Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, l'équation de la tangente en x_0 est donnée par la partie principale $b + ax$ du développement, d'après les propositions 3 et 4.
En appliquant la méthode de la section 3.2, on peut éventuellement trouver un équivalent de la forme

$$f(x) - (ax+b) \underset{x_0}{\sim} a_p (x-x_0)^p,$$

et le signe du membre de droite donne la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0.

Exemple 9. Prolonger par continuité et étudier la dérivabilité et la position relative de la courbe et de la tangente en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

3.4 Recherche d'asymptote

Méthode 3. Développement asymptotique

Si on obtient en $+\infty$ (en effectuant des développements limités en la variable $1/x$, qui tend vers 0) :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_p}{x^p} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

avec $a_p \neq 0$, alors :

- ⋆ $y = a_0 x + a_1$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe de f.
- ⋆ $f(x) - a_0 x - a_1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_p}{x^p}$ donne par son signe la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de l'infini.

Exemple 10. ✎ Rechercher l'asymptote en $+\infty$ de la courbe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$, ainsi que leur position relative.

4. Développements limités classiques

⚠ Les développements limités qui suivent ne sont valables qu'au voisinage de 0 !

$\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o_0(x^n)$	
$\longrightarrow \quad \mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n})$	car $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\longrightarrow \quad \mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1})$	car $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\longrightarrow \quad \cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n})$	car $\cos(x) = \mathrm{ch}(ix)$
$\longrightarrow \quad \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1})$	car $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(ix)}{i}$
$\qquad \longrightarrow \quad \tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o_0(x^7)$	par quotient

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$	
$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$	$x \to -x$
$\qquad \longrightarrow \quad \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o_0(x^n)$	par intégration
$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n})$	$x \to -x^2$
$\qquad \longrightarrow \quad \arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$	par intégration

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_0(x^n)$ [1]	
$\longrightarrow \quad \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \cdots + o_0(x^n)$	$\alpha = \frac{1}{2}$
$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + \cdots + o_0(x^{2n})$	$\alpha = -\frac{1}{2}$ et $x \to -x^2$
$\qquad \longrightarrow \quad \arcsin(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \cdots + o_0(x^{2n+1})$	par intégration
$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = -1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{8}x^4 - \cdots + o_0(x^{2n})$	
$\qquad \longrightarrow \quad \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{40}x^5 - \cdots + o_0(x^{2n+1})$	par intégration

(1). par analogie, on généralise la définition du coefficient k parmi n lorsque k n'est pas entier : $\dbinom{n}{\alpha} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

Bilan du § 14

Prérequis

① Fonctions usuelles : tout ! §3 Fonctions usuelles . . . . . . ☐
② Relation de prépondérance et d'équivalence : §10 Limites . . . . . . ☐
③ Polynômes : §14 Polynômes . . . . . . ☐

Objectifs prioritaires

① savoir et savoir retrouver les développements limités classiques (section 4) . . . . . . ☐
② connaître l'interprétation d'un DL d'ordre 1 (propositions 3 et 4) . . . . . . ☐
③ savoir obtenir un DL de somme, produit, composée (section 1.3) . . . . . . ☐
④ savoir obtenir un DL de quotient (exemple 3) . . . . . . ☐
⑤ connaître la formule de Taylor-Young (proposition 7) . . . . . . ☐
⑥ savoir intégrer (proposition 6), dériver (proposition 8) un DL . . . . . . ☐
⑦ savoir appliquer les DL aux calculs de limite (section 3.1) . . . . . . ☐
⑧ savoir appliquer les DL aux recherches d'équivalents (section 3.2) . . . . . . ☐
⑨ savoir appliquer les DL aux recherches de tangentes et d'asymptotes (sections 3.3 et 3.3) . . . . . . ☐

Objectifs secondaires

① Comprendre la démonstration du résultat d'intégration des DL (proposition 6) . . . . . . ☐

Approfondissement

① Comprendre la démonstration de la formule de Taylor Young (proposition 7) . . . . . . ☐

TD du § 14

Exercice 1. Développements limités

Donner le développement limité à l'ordre

① 3 en 0 de $(1+x)^x$ ② 3 en 0 de $\dfrac{1}{2-x}$. ③ 4 en 0 de $\sqrt{1+x}\arcsin(x)$ ④ 6 en 0 de $\cos^2(x)$

⑤ 6 en 0 de $\cos(\sin(x))$. ⑥ 6 en 0 de $\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ⑦ 4 en 0 de $\exp(\cos(x))$. ⑧ 4 en 0 de $\dfrac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$.

⑨ 4 en e de $\ln(x)$. ⑩ 4 en 2 de $\exp(x)$. ⑪ 4 en 0 de $\displaystyle\int_x^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Limites et développements limités

Calculer ① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin(x)}}{x^3}$ ② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\mathrm{sh}(x)-x\mathrm{ch}(x)}$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)+\frac{1}{2}\sin^2(x)\right)^{1/x^4}$ ④ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$.

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ ⑥ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}+3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$

Exercice 3. Limite de suite ATS 2010

Déterminer la limite en $+\infty$ de $(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3})^n$.

Exercice 4. Limite de fonction ATS 2010

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Exercice 5. Étude locale

À partir d'un développement limité de la fonction f, déduire le prolongement par continuité, dérivabilité, la position relative courbe–tangente et l'allure de la courbe de f au voisinage de a, pour :

① $a=0$ et $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$

Exercice 6. Asymptotes et développements limités

Chercher les asymptotes à la courbe de f, ainsi que la position relative de l'asymptote et de la courbe au voisinage de l'infini.

① $f:\mathbb{R}^*\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{x^2-x+2}{x+1}\mathrm{e}^{-1/x}$.

Exercice 7. Développement limité de tangente

On cherche une méthode pour déterminer le développement limité de tangente à l'ordre n en 0.

On définit une suite (P_n) de polynômes par $P_0(X)=X$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(X)=(1+X^2)P_n'(X)$.

① Vérifier par récurrence que $\forall x\in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \tan^{(n)}(x)=P_n(\tan(x))$.

② En déduire : $\tan^{(n)}(0)$ pour $n=1,\dots,5$, puis le développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 6 en 0.

③ Application : calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}3n^5\tan\left(\frac{1}{n}\right)-3n^4-n^2$.

Exercice 8. Arc tangente

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\arctan(x)$.

Calculer, pour $x>0$, $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})$.

En déduire un développement asymptotique en $\mathrm{o}(\frac{1}{x^3})$ de arctan en $+\infty$ puis en $-\infty$.

Exercice 9. Tangente à une courbe en un point stationnaire

Déterminer les points stationnaires de la fonction vectorielle $\vec{g}$, et donner une équation de leur tangente.
$\vec{g}:\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ t\mapsto(\cos^3 t\,;\sin^3 t)$.