§ 13 : Polynômes

1. Notion de polynôme

1.1 Espaces vectoriels de polynôme

Notation 1. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1. L'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ d'indéterminée X est le sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions, définies sur $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, tel que :

$$\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$$

où $X : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto x$ est la fonction identité.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1, X, \ldots, X^n)$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'indéterminée X.

Remarque 1. D'après le chapitre §11 « espaces vectoriels », la famille $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$. La définition 1 implique alors qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un entier naturel n et des nombres $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Les composantes $a_0, \ldots, a_n$ de P dans la base canonique $\mathcal{B}$ sont appelés les *coefficients* du polynôme P.

Définition 2. Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- ⋆ si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, son degré est le plus petit $d \in \mathbb{N}$, tel que $P(X) \in \mathbb{K}_d[X]$. On le note $d = \deg P$.
- ⋆ on pose par convention $\deg 0_{\mathbb{K}[X]} = -\infty$.

Dans le cas où $\deg P = d \in \mathbb{N}$, sa composante suivant X^d est le *coefficient dominant* du polynôme. Le polynôme est dit *unitaire* lorsque sont coefficient dominant vaut 1.

Exemple 1. ✎ Soit P un polynôme unitaire de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Donner le degré et le coefficient dominant de :
① P' ② P^2 ③ $P(X^2)$ ④ $P(X+1) - P(X)$

Remarque 2. Une famille $(P_0, \ldots, P_n, \ldots)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est *échelonnée* si $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg P_k = k$. Une telle famille est une base de $\mathbb{K}[X]$. (les composantes dans la base canonique de l'équation $P = \lambda_0 P_0 + \ldots \lambda_n P_n$ donnent un système linéaire triangulaire de coefficients diagonaux non nuls).

De même, une famille échelonnée $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 2. ✎ La base de Taylor en $a \in \mathbb{K}$, $(T_0, \ldots, T_n, \ldots)$, est définie par $P_k = \dfrac{1}{k!}(X-a)^k$.

Vérifier qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 3 (Autres opérations). En plus de la somme et du produit externe, l'ensemble des polynômes est stable par la multiplication interne et la composition des fonctions.

1.2 Dérivation

Définition 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La *dérivation* est l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\forall k \in \mathbb{N}, (X^k)' = kX^{k-1}$. On note P', la *dérivée* de P, l'image de P par cette application linéaire. Cette définition coïncide avec la définition usuelle de la dérivée sur $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 3. ✎ Calculer $(T_k)'$ la dérivée du k-ème polynôme de la base de Taylor en a de l'exemple 2.

En déduire que la dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ de noyau les constantes et d'image $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Montrer que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = P(a)\,T_0 + P'(a)\,T_1 + \cdots + P^{(n)}(a)\,T_n$. (on pourra dériver k fois et évaluer en a la décomposition de P dans la base $\{T_k\}_{k=1,\ldots,n}$: $P = \lambda_0 T_0 + \cdots + \lambda_n T_n$).

1.3 Division euclidienne de polynômes

Proposition 1.

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Alors il existe deux polynômes uniques Q et R, avec $\deg R < \deg B$, tels que $A = BQ + R$. Le polynôme Q est le *quotient* et le polynôme R le reste de la division euclidienne de A par B.

Démonstration. Soit $B \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ de degré d. La famille $(1, X, \dots X^{d-1}, B, XB, X^2B, \dots)$ est échelonnée, donc c'est une base de $\mathbb{K}[X]$. Ainsi, $\mathbb{K}[X] = B\,\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$, ce qui prouve la proposition. □

Méthode 1. Algorithme de division euclidienne

En pratique, on obtient le quotient et le reste d'une division euclidienne de polynômes de la même manière que pour les entiers :

1. On pose $A_0 = A$, $Q_0 = 0$, β le coefficient dominant de B et b son degré.
2. Si $\deg A_k < \deg B$, l'algorithme est terminé : $Q = Q_k$ et $R = A_k$.
3. Sinon, on pose $A_{k+1} = A_k - \frac{\alpha_k}{\beta} X^{\deg(A_k) - \deg B} B$ et et $Q_{k+1} = Q_k + \frac{\alpha_k}{\beta} X^{\deg(A_k) - \deg B}$ où α_k est le coefficient dominant de A_k.
   Alors $\deg A_{k+1} < \deg A_k$ et on va à l'étape 2

On peut poser la division comme pour les entiers !

Exemple 4. On cherche à effectuer la division euclidienne de $A = X^3 + X^2 - 1$ par $B(X) = X - 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \ +2x \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +0x & & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \ +2x \ +2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +0x & & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & -1 & \\
 & & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}$$

Donc $X^3 + X^2 - 1 = (X^2 + 2X + 2)(X - 1) + 1$.

Exemple 5. ✎ Effectuer la division euclidienne de $2X^4 - X^3 + 3X - 5$ par $X^2 - X - 2$.

Exemple 6. ✎ Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3)$.

Exemple 7. ✎ Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.
En déduire que $P(\alpha) = 0 \iff P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ pour un $Q \in \mathbb{K}[X]$.

2. Racines de polynômes

2.1 Racines et factorisation

Définition 4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Les *racines* (ou *zéros*) du polynôme P sont les solutions dans $\mathbb{K}$ de l'équation $P(x) = 0$.

Une racine α est de *multiplicité* $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si : $P(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Une racine de multiplicité 1 est *simple*, une racine de multiplicité 2 est *double*...

Proposition 2. Factorisation

Le nombre $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre k du polynôme P de degré $d \in \mathbb{N}^*$ (P non nul) si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\deg(Q) = \deg(P) - k$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. On considère la base de Taylor en a, notée $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$, étudiée dans les exemples 2 et 3. Les deux conditions de la proposition sont équivalentes au fait que les composantes $T_0, \dots, T_{k-1}$ sont nulles, et pas celle suivant T_k. □

2.2 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 3. d'Alembert et Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Démonstration. Admis.

Définition 5. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible si et seulement si : $P = AB \implies A$ ou B constant. Ces polynômes jouent un rôle analogue aux nombres premiers de l'arithmétique.

Remarque 4. Cette définition implique immédiatement que tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ peut s'écrire comme un produit de facteurs irréductibles.

Le théorème fondamental et le théorème de factorisation ont pour conséquence que les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les constantes non nulles et les polynômes de degré 1 :

Proposition 4. Factorisation complexe

Tout polynôme P non nul de $\mathbb{C}[X]$ est le produit de son coefficient dominant a_n et de polynômes unitaires de degré 1 : précisément, si les racines de P sont $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$:

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i} \text{ avec } m_1 + \dots + m_p = n$$

Cette décomposition est unique à une permutation des facteurs près.

Remarque 5. Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ unitaire et de degré $n \in \mathbb{N}^*$ ($a_n = 1$). Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines. En développant le produit de la proposition 4, on trouve que :

$$\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n = (-1)^n a_0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = -a_{n-1}$$

Exemple 8. ✎ Décomposer $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. (racines évidentes ?)

2.3 Factorisation réelle

Remarque 6. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et α est une racine complexe de P, alors :

- ⋆ soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et P se factorise par $(X - \alpha)$
- ⋆ soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$ car $P \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi $\bar{\alpha}$ est racine et P se factorise par le polynôme produit $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X - 2\,\Re\mathrm{e}(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont donc les constantes, les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Proposition 5. Factorisation réelle

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ est le produit de son coefficient dominant a_n, de polynômes unitaires de degré 1 et de polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatif. Cette décomposition est unique à une permutation des facteurs près.

Remarque 7. Précisément, si les racines réelles de P sont $\alpha_1 \dots, \alpha_p$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$ et si ses racines complexes sont $\beta_1, \dots, \beta_q$ et $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_q$, où β_i est de multiplicité n_i :

$$P(X)=a_n\prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_j}\prod_{j=1}^{q}(\underbrace{X^2+2\,\Re\mathrm{e}(\beta_j)X+|\beta_j|^2}_{\Delta<0})^{n_j}\text{ avec } m_1+\cdots+m_p+2n_1+\cdots+2n_q=n$$

Exemple 9. ✎ Décomposer $X^4+X^3-X^2+X-2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Fractions rationnelles

3.1 Notion de fraction rationnelle

Définition 6. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul.

Le quotient $\dfrac{A}{B}$ est une *fraction rationnelle* à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le polynôme A est le *numérateur* de la fraction, le polynôme B est son *dénominateur*.

L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

On munit $\mathbb{K}(X)$ d'une relation d'égalité et des lois suivantes : $\forall A,B,C,D\in\mathbb{K}[X]$ avec B,D non nuls :

① $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}\iff AD=BC$ ② $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD+BC}{BD}$ ③ $\lambda\cdot\dfrac{A}{B}=\dfrac{(\lambda A)}{B}:(\lambda\in\mathbb{K})$ ④ $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

Exemple 10. $\dfrac{X^8+1}{X^7-X^3}$, $\dfrac{1}{3X^3-X^2+X+1}$, $X+3=\dfrac{X+3}{1}$ sont des fractions rationnelles.
Le dernier exemple se généralise et permet de montrer que $\mathbb{K}[X]\subset\mathbb{K}(X)$.

Remarque 8. Deux quotients de polynômes égaux au sens de ① sont des *représentants* de la même fraction rationnelle. Une fraction est dite sous *forme irréductible* lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de facteurs irréductibles unitaires communs. En particulier, une fraction rationnelle s'écrit de manière unique comme une fraction irréductible, avec un dénominateur unitaire.

Exemple 11. ✎ Mettre $\dfrac{X^2-1}{X^3-6X+5}$ sous forme irréductible. (factoriser et simplifier)

Remarque 9. Les opérations ② et ③ permettent de munir $\mathbb{K}(X)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace. L'opération ④ confère à $\mathbb{K}(X)$ une structure de corps commutatif [(1)]. Enfin, la composée $F\circ G$ de deux fractions rationnelles F et G est encore une fraction rationnelle (pourvu que G ne soit pas une constante annulant le dénominateur réduit de F).

3.2 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 7. On définit le *degré* d'une fraction rationnelle par

$$\forall(A,B)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]\setminus\{0_{\mathbb{K}[X]}\},\ \deg\frac{A}{B}=\deg A-\deg B$$

toujours avec la convention $\deg 0_{\mathbb{K}[X]}=-\infty$.

Remarque 10. Le degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas de son représentant.

Proposition 6. Degré et opérations

Soient $F,G\in\mathbb{K}(X)$, $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}^*$. On a :

① $\deg F\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ ② $\deg\dfrac{1}{P}=-\deg P$ ③ $\deg\dfrac{P}{1}=\deg P$ ④ $\deg(F+G)\leqslant\max(\deg F,\deg G)$
⑤ $\deg FG=\deg F+\deg G$ ⑥ $\deg\lambda F=\deg F$.

(1). ensemble muni d'une addition et d'une multiplication internes commutatives, associatives, d'éléments neutres respectifs la constante 0 et la constante 1, telles que tout élément admette un opposé et tout élément non nul une inverse, et telles que l'addition soit distributive par rapport à la multiplication.

Remarque 11. Cette proposition découle immédiatement de la définition du degré. De $\mathbb{K}[X] \subset K(X)$, on déduit que les trois derniers points sont également valables pour les polynômes.

3.3 Partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition 7. Partie entière

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe $Q \in K[X]$ et $G \in K(X)$ uniques tels que $F = Q + G$ avec $\deg G < 0$. Le polynôme Q est la *partie entière* de la fraction rationnelle F.

Démonstration. Existence : notons $F = \frac{A}{B}$ avec $(A, B) \in K[X] \times K[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$. On note Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$ donc $F = Q + \frac{R}{B}$ où $\deg R < \deg B$ donc $\deg \frac{R}{B} < 0$. Unicité : on suppose que $F = \frac{A}{B} = Q+G$ avec $\deg G < 0$. Alors $A-BQ = GB$. Donc GB, sous forme irréductible, est un polynôme et $\deg GB < \deg B$. Par unicité de la division euclidienne, Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division de A par B. □

Exemple 12. ✎ Partie entière de $\dfrac{X^3 - X^2 + 1}{X^2 + 1}$? D'une fraction rationnelle de degré strictement négatif ?

4. Pôles d'une fraction rationnelle

4.1 Notion de pôle

Définition 8. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle.

- ⋆ les *zéros* de F sont les racines du numérateur d'un représentant irréductible de F.
- ⋆ les *pôles* de F sont les racines du dénominateur d'un représentant irréductible de F.
- ⋆ la *multiplicité* d'un pôle de F est celle de la racine correspondante d'un représentant irréductible de F.

Remarque 12. Les théorèmes de factorisation montrent que les notions de zéro, de pôles, et leurs multiplicités ne dépendent donc des représentants irréductibles choisis pour pour le numérateur et le dénominateur.

4.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Exemple 13. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X + 7}{(X + 1)X^3(X + 2\mathrm{i})}$ c'est chercher a, b_1, b_2, b_3, c tels que :

$$\frac{X + 7}{(X + 1)X^3(X + 2\mathrm{i})} = \frac{a}{X + 1} + \frac{b_3}{X^3} + \frac{b_2}{X^2} + \frac{b_1}{X} + \frac{c}{X + 2\mathrm{i}}$$

En général, conjecturer la forme de la partie polaire recherchée en fonction du pôle et de sa multiplicité.

Proposition 8.

Soit $F \in \mathbb{C}(X)^*$ une fraction rationnelle et $k \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)^{n_i}$ l'unique factorisation du dénominateur d'un représentant irréductible de F. Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ et pour tous $(i, j) \in \{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, n_i\}$, il existe un unique $c_{ij} \in \mathbb{C}$, tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{ij}}{(X - \alpha_i)^j} \right) = E + \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left(\frac{c_{i1}}{X - \alpha_i} + \cdots + \frac{c_{in_i}}{(X - \alpha_i)^{n_i}} \right)}_{\text{partie polaire de } \alpha_i}$$

Il s'agit de la *décomposition en éléments simples* dans $\mathbb{C}$ de la fraction F.

Démonstration. Quitte à effectuer une division euclidienne, on peut supposer la partie entière $E(X)$ nulle. On prouve que la famille formée par les fractions rationnelles qui servent à former les parties polaires de chaque pôle est libre. Par un argument de dimension, c'est donc une base de l'espace des fraction rationnelles de degré strictement négatif de dénominateur $D(X)$. □

Exemple 14. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de : $\dfrac{X^8+1}{X^7-X^3}$

4.3 Obtenir les coefficients d'une décomposition en éléments simples

Méthode 2. Coefficient du terme polaire de plus bas degré

Pour obtenir le coefficient c de $\frac{1}{(X-\alpha)^n}$ où n est la multiplicité du pôle α de la fraction rationnelle F, il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité (fraction rationnelle et forme décomposée) par $(X-\alpha)^n$ et d'évaluer en $X=\alpha$. On note : $(X-\alpha)^n F(X)\big|_{X=\alpha} = c$

Exemple 15. Utiliser la méthode 2 pour obtenir les coefficients de :
$\dfrac{1}{X^3}$, $\dfrac{1}{X-1}$ et $\dfrac{1}{X-\mathrm{i}}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^8+1}{X^7-X^3}$.

Méthode 3. Utiliser l'invariance d'une fraction rationnelle

Si une fraction rationnelle F vérifie l'une des propriétés suivantes, il en va de même pour sa décomposition :
- ⋆ F paire : $F(-x)=F(x)$.
- ⋆ F impaire : $-F(-x)=F(x)$.
- ⋆ F réelle : $\overline{F(\bar{x})}=F(x)$.

Exemple 16. Utiliser la méthode 3 pour obtenir les coefficients de :
$\dfrac{1}{X^2}$, $\dfrac{1}{X+1}$ et $\dfrac{1}{X+\mathrm{i}}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^8+1}{X^7-X^3}$.

Méthode 4. Limite et évaluation

Pour obtenir une relation entre les coefficients d'une décomposition en éléments simples, on peut :
- ⋆ évaluer l'égalité en une valeur simple (en dehors des pôles).
- ⋆ multiplier l'égalité par $X^{-\deg F}$ et passer à la limite en $+\infty$. (ou utiliser les équivalents)

Exemple 17. ✎ Coefficient de $\dfrac{1}{X}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^8+1}{X^7-X^3}$.

Remarque 13. Après l'utilisation des méthodes précédentes, on peut réduire au même dénominateur et identifier pour trouver les derniers coefficients. Il s'agit toutefois d'une méthode lourde.

4.4 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Exemple 18. Décomposer $\dfrac{X^2-1+X}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)(X^2-1)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$, c'est trouver les coefficients tels que :

$$\frac{X^2-1+X}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)(X^2-1)} = \frac{a_1X+b_1}{X^2+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2+1)^2} + \frac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}$$

⚠ X^2-1 n'est pas irréductible : $X^2-1=(X+1)(X-1)$

Proposition 9. Soit $F\in\mathbb{R}(X)^*$ et $k\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{n_i}\prod_{i=1}^{q}(X^2+\beta_jX+\gamma_j)$ la factorisation du dénominateur d'un représentant irréductible de F. Il existe un polynôme $E\in\mathbb{R}[X]$, et des coefficients a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} uniques tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\frac{c_{ij}}{(X-\alpha_i)^j}\right) + \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{m_j}\frac{a_{ij}X+b_{ij}}{(X^2+\beta_iX+\gamma_i)^j}\right)$$

Il s'agit de la *décomposition en éléments simples* dans $\mathbb{R}$ de la fraction F.

Exemple 19. ✎ Obtenir la décomposition réelle de $\dfrac{X^8+1}{X^7-X^3}$ et en déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^8+1}{x^7-x^3}\,\mathrm{d}x$.

TD du § 13

Exercice 1. Équation polynomiale
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:
① $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ ② $P \circ P = P$ ③ $P^2 = X$

Exercice 2. Division euclidienne et asymptotes
Effectuer la division euclidienne de $X^3 + 7X^2 - 2$ par $X^2 + X + 1$.

En déduire les éventuelles asymptotes au graphe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+7x^2-2}{x^2+x+1}$

Exercice 3. Raisonnement sur les restes
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1, que le reste de la division euclidienne de P par $X - b$ est -1, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?

Exercice 4. Divisibilité et composition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq X$.

① Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
② Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
③ On note $P^{\langle n \rangle} = P \circ \cdots \circ P$ (composition de n facteurs). Établir que $P(X) - X$ divise $P^{\langle n \rangle} - X$.

Exercice 5. Bases de polynômes
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(P_k)_{k=0\dots n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, où $\forall k \in \{0, \dots, n\}$,

① $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$.
② $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$
③ $P_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$
④ $P_k = \dfrac{X^k}{k!}$

Exercice 6. Multiplicité d'une racine
Montrer que a est racine de P et déterminer l'ordre de multiplicité de a pour : ① $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$. ② $a = 1$ et $P = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ ③ $P(X) = \dfrac{1}{2}(X-a)[Q'(X) + Q'(a)] + Q(a) - Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q''''(a) \neq 0$.

Exercice 7. Coefficients variables d'un polynôme et divisibilité
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8. Divisions euclidiennes
Effectuer la division euclidienne de
① $X^3 + 2X^2 - 9X + 18$ par $X - 2$ ② $X^3 + \mathrm{i}X^2 + X$ par $X - \mathrm{i} + 1$ ③ $1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ par $X^2 - 5X + 3$

Exercice 9. Factorisations
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme
② $X^3 - 3$. ③ $X^5 - 1$. ④ $X^6 + 3X^4 + 5X^2 + 6$.

Exercice 10. Décompositions en éléments simples réels
Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle :
① $\dfrac{2X^2 - 15X + 33}{(X+1)(X-5)}$ ② $\dfrac{37 - 11X}{(X+1)(X-2)(X-3)}$ ③ $\dfrac{X^4 + X^3 + 3X^2 + 1}{(X^2+1)^2 X}$ ④ $\dfrac{6X - 11}{X^2 - 2X + 1}$

Exercice 11. Dérivées successives
Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

Exercice 12. Limite de suite
Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

Exercice 13. Intégrales et éléments simples
Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-x^2}{x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 14. Utilisation du degré d'une fraction rationnelle
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F\in\mathbb{C}(X)$ telle que $F^2=X$.

Exercice 15. Éléments simples et sommes télescopiques

① Décomposer la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X(X+1)}$ en éléments simples.

② En déduire une expression simple pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ de $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$. Quelle est la limite de s_n ?

③ Faire de même pour $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 16. Polynômes de Tchebychev
Soit $n\in\mathbb{N}$. On considère $f_n : [-1\,;1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\cos(n\arccos(x))$.

① Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3.
② Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[-1\,;1]$, exprimer $f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
③ Établir qu'il existe un unique polynôme $T_n\in\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur l'intervalle $[-1\,;1]$.
④ Préciser le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
⑤ Observer que T_n possède n racines, toutes dans $]-1\,;1[$. Donner une expression de ces racines.
⑥ Donner une équation différentielle satisfaite par T_n.
⑦ Calculer $T_n^{(k)}(1)$ et $T_n^{(k)}(-1)$.

Exercice 17. Puissances d'une matrice et polynôme annulateur
On considère la matrice $\begin{pmatrix}7 & -8\\ 4 & -5\end{pmatrix}$.

① Calculer $A^2-2A-3\,\mathrm{Id}_2$.
② En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
③ Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-2X-3.
④ En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 18. Théorème de Lucas
On souhaite montrer que, pour tout polynôme non constant P de $\mathbb{C}[X]$, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P (c'est-à-dire : sont barycentres des racines de P affectées de coefficients positifs).

① Un exemple : Soit $P(X)=X^3-X^2+X-1$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes P et P'.
Représenter leurs racines dans le plan complexe et vérifier le théorème de Lucas.
② Soit P un polynôme non constant, à coefficients complexes.
Rappeler la forme générale de sa factorisation dans $\mathbb{C}$.
En déduire que $\dfrac{P'(X)}{P(X)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{m_k}{X-\alpha_k}$ où les $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont les racines de P et les m_i leurs multiplicités.
③ Soit α une racine P' qui n'est pas racine de P. Vérifier que : $\exists(c_1,\dots,c_p)\in(\mathbb{R}_+)^p : \alpha=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}c_k\alpha_k$ et $c_1+\dots+c_p>0$.
④ Vérifier que c'est encore vrai lorsque α est une racine de multiplicité au moins 2 de P, et conclure.

Bilan du § 13

Prérequis

① Notion de base et de sous-espace vectoriel §11 Espaces vectoriels ☐
② Rudiments de calcul dans les complexes : §2 Complexes ☐
③ Dérivation : §10 Limites ☐

Objectifs prioritaires

① Connaître la notion de degré ☐
   (a) définition 2 (degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire) ☐
   (b) définition et opérations sur le degré d'une fraction rationnelle (3.2) ☐
   (c) utilisation du degré : exercice 1, exemples 1 et 2 ☐
② Connaître les espaces vectoriels $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ ☐
   (a) base canonique, dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, notion de famille échelonnée (1.1) ☐
   (b) espaces vectoriels et polynômes : exercice 5 ☐
③ connaître la définition et les propriétés de l'endomorphisme de dérivation (1.2) ☐
④ connaître la division euclidienne (1.3) ☐
   (a) maîtriser la méthode 1 de division euclidienne ☐
   (b) savoir refaire les exemples 4 et 5, l'exercice 2 ☐
   (c) connaître le résultat théorique de division euclidienne, et savoir l'utiliser (proposition 1 ☐
   (d) savoir refaire les exemples 6 et 7, les exercices 3 et 4 ☐
   (e) savoir calculer la partie entière d'une fraction rationnelle 3.3 ☐
⑤ notion de racine et de multiplicité (2.1), exercice 6 ☐
⑥ connaître la factorisation dans $\mathbb{C}$ d'un polynôme (proposition 4) ☐
⑦ connaître la factorisation dans $\mathbb{R}$ d'un polynôme (proposition 5) ☐
⑧ Notion de pôle d'une fraction rationnelle ☐
   (a) savoir écrire la forme d'une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ (4.2) ou $\mathbb{R}$ (4.2) ☐
   (b) savoir trouver les coefficients dans la décomposition (méthodes de 4.3) ☐
   (c) savoir refaire les exercices 10, **??** et l'exemple du cours ☐

Objectifs secondaires

① relations entre coefficients, somme et produit des racines d'un polynôme (remarque 5) ☐

Approfondissement

① connaître le théorème fondamental de l'algèbre (théorème 3) ☐