§ 12 : Intégrale sur un segment

1. Intégrale des fonctions en escalier

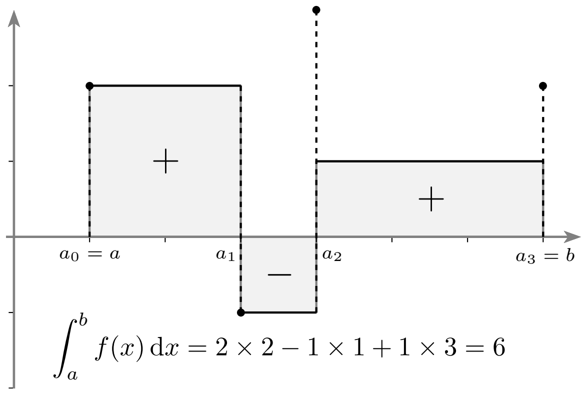
1.1 Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

Notation 1. Dans tout le chapitre, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Définition 1. Une *subdivision* $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ de l'intervalle $[a\,;b]$ est une suite finie, strictement croissante, d'extrémités a et b :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Une subdivision $(\alpha_j)_{j\in[\![0;m]\!]}$ est dite *plus fine* que $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ si $\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \exists j \in [\![0\,;m]\!],\ a_k = \alpha_j$.



Définition 2. Une fonction f définie sur le segment $[a\,;b]$ est *une fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(a_k)_{k=0,\ldots,n}$ du segment $[a\,;b]$ telle que pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_k\,;a_{k+1}[$ est constante (on note $f|_{]a_k;a_{k+1}[}$ cette fonction restreinte).

La subdivision est alors dite *adaptée* à la fonction f.

Une fonction définie sur un intervalle quelconque I est en escalier si elle est en escalier sur tout segment de I.

On note $\mathcal{E}(I)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur un intervalle I.

Remarque 1. L'ensemble $\mathcal{E}([a\,;b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions : il contient la fonction constante nulle ($a_0 = a$ et $a_1 = b$ est une subdivision adaptée) et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v) \in \mathcal{E}([a\,;b]) \times \mathcal{E}([a\,;b])$, soit $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ une subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à u et une subdivision adaptée à v. Sur chaque $]a_k\,;a_{k+1}[$, $\lambda u + v$ est constante car u et v le sont, donc $\lambda u + v \in \mathcal{E}([a\,;b])$.

L'ensemble des fonctions en escalier est aussi stable par produit interne (même preuve).

Définition 3. Soit $f \in [a\,;b]$ (avec $a < b$) et $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $k \in [0\,;n-1]$ on note c_k la valeur (constante) de f sur $]a_k\,;a_{k+1}[$. On définit l'intégrale entre a et b de f comme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(a_{k+1} - a_k)$$

On adopte également les conventions suivantes :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ et } \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 1. ✎ soit $c \in \mathbb{R}$. À l'aide de la définition, démontrer que $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x = (b-a)c$.

Remarque 2. Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, l'*unité* d'aire est l'aire du rectangle unité : $\|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$. Lorsque $a < b$, l'intégrale de la définition 3 s'interprète comme l'*aire algébrique*, exprimée en unités d'aire, des rectangles délimités par l'axe des abscisses et la courbe de f (on ajoute l'aire des rectangles au dessus de l'axe des abscisses et on retranche l'aire des rectangles sous l'axe des abscisses).

1.2 Propriétés de l'intégrale

Remarque 3. On montrera dans la partie 2 que les propriétés qui suivent restent vraies si l'on considère des fonctions u et v continues (de $\mathcal{C}^0([a\,;b])$) ou même continues par morceaux (de $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b])$) au lieu de fonctions en escalier (de $\mathcal{E}([a\,;b])$).

Proposition 1. Propriétés de l'intégrale

Soient u et v deux fonctions en escalier de $\mathcal{E}([a\,;b])$, avec $a \leqslant b$.

① Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda u(x) + v(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

② Relation de Chasles : $\forall t \in [a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b u(x) d\,x = \int_a^t u(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^b u(x)\,\mathrm{d}x$.

③ Positivité : si $\forall x \in [a\,;b],\ u(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

④ Croissance : si $\forall x \in [a\,;b],\ u(x) \leqslant v(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

⑤ Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |u(x)|\,\mathrm{d}x$

⑥ Inégalité de la moyenne : si $\forall x \in [a\,;b],\ m \leqslant u(x) \leqslant M$ alors $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

Les propriétés ① et ② s'étendent au cas où $b \leqslant a$ et $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

① : appliquer la définition 3 aux deux membres de l'égalité, avec une subdivision adaptée à la fois à u et v.

② : appliquer la définition 3 aux deux membres de l'égalité, avec une subdivision adaptée à u qui contient t.

③ : d'après la définition 3, puisque pour tout k, $a_{k+1} - a_k > 0$ et $c_k \geqslant 0$.

④ : appliquer la positivité ③ à $v - u$ puis la linéarité ①.

⑤ : d'après l'inégalité triangulaire usuelle appliquée dans la définition 3

⑥ : on applique la croissance ④ d'une part à $m \leqslant u$ et d'autre part à $u \leqslant M$. □

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

2.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 4. Une fonction f définie sur le segment $[a\,;b]$ est une fonction *de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux* s'il existe une subdivision $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ du segment $[a\,;b]$, telle que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_k\,;a_{k+1}[$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de $[a_k\,;a_{k+1}]$.

La subdivision est alors dite *adaptée* à la fonction f.

Une fonction définie sur un intervalle quelconque I est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout segment de I.

On note $\mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I.

Proposition 2. Approximation uniforme

Soit une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle $[a\,;b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f_ε en escaliers qui majore, et approche uniformément, f sur l'intervalle $[a\,;b]$ à ε près :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b]),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists f_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,;b])\ :\ \forall x \in [a\,;b],\ f_\varepsilon(x) \geqslant f(x) \geqslant f_\varepsilon(x) - \varepsilon$$

Démonstration. On considère d'abord une fonction f continue sur $[a\,;b]$. On construit une suite (finie ou infinie) (a_k) par récurrence : $a_0 = a$ et

- ⋆ si $\forall x \in\,]a_n\,;b],\ |f(x) - f(a_n)| \leqslant \varepsilon$, on pose $a_{n+1} = b$ et la suite s'arrête.
- ⋆ sinon, on définit a_{n+1} comme la borne supérieure des $x > a_n$ tels $|f(x) - f(a_n)| \leqslant \varepsilon$.

Si la suite (a_n) est infinie, elle est croissante par définition, et majorée par b, donc, par le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \leqslant b$ (qui est supérieur à tous les a_n).

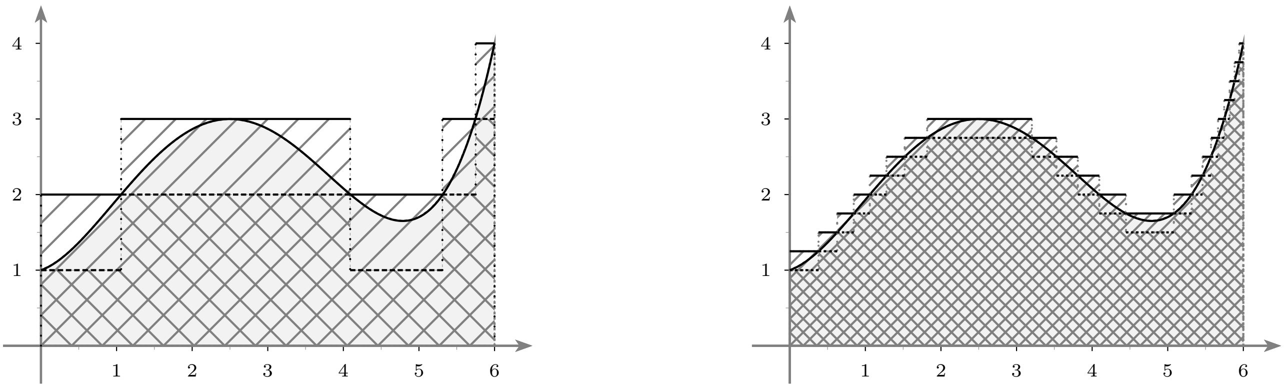
Comme f est continue en ℓ, $\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in [a\,;b]$ tel que $|x-\ell| < \delta$, on a : $|f(x)-f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Cet intervalle contient les termes de la suite (a_n) à partir d'un certain rang N, ce qui est contradictoire car $\forall x \in [a_N\,;\ell],\ |f(a_n)-x| \leqslant |f(a_n)-f(\ell)|+|f(\ell)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ donc $\ell \leqslant a_{N+1}$.

La suite est donc finie, il s'agit d'une subdivision à partir de laquelle on définit f_ε :

- ⋆ $f_\varepsilon(a_n) = f(a_n)$ pour tout n
- ⋆ sur $]a_n\,;a_{n+1}[$, $f_\varepsilon(x)$ est constante et égale au maximum de f sur $[a_n\,;a_{n+1}]$ (qui existe d'après le théorème du maximum d'une fonction continue).

Si f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$ et que (b_k) est une subdivision adaptée de f, on construit f_ε sur $[b_k\,;b_{k+1}]$ comme précédemment à partir du prolongement continue à $[b_k\,;b_{k+1}]$ de $f|_{]b_k;b_{k+1}[}$. □

Exemple 2. Sur chacun des graphes, on a représenté une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0\,;6])$, et deux fonctions en escaliers qui encadrent f et l'approchent à ε-près. ($\varepsilon = 1$ à gauche et 0,25 à droite). Les aires hachurées correspondent aux intégrales des fonctions en escalier, l'aire grisée à l'intégrale de f.



Définition 5. Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$. Soient

$$I^+(f,a,b) = \left\{ \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x \ : \ u \in \mathcal{E}([a\,;b]),\ v \geqslant f \right\} \text{ et } I^-(f,a,b) = \left\{ \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \ : \ u \in \mathcal{E}([a\,;b]),\ u \leqslant f \right\}.$$

Si la borne inférieure i^+ de l'ensemble $I^+(f,a,b)$ et la borne supérieure i^- de l'ensemble $I^-(f,a,b)$ existent et sont égales, on dit que f est *intégrable* sur le segment $[a\,;b]$ et on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = i^+ = i^-$.

On étend l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes en posant : $\displaystyle\int f = \int \Re\mathrm{e}(f) + \mathrm{i}\int \Im\mathrm{m}(f)$.

Proposition 3.

Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a\,;b]$ est intégrable.
Les résultats de la proposition 1 restent valables pour des fonctions $(u,v) \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b])$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b])$, la proposition 2 affirme qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) de fonctions de $\mathcal{E}([a\,;b])$ telles que $u_n \leqslant f \leqslant v_n$ et $\forall x \in [a\,;b],\ v_n(x)-u_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = \int_a^b v_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (v_n(x)-u_n(x))\,\mathrm{d}x \in \left[0\,;\frac{b-a}{n}\right]$$

La suite (d_n) est donc convergente vers 0, donc f est intégrable.

Les égalités et inégalités de la proposition 1 se démontrent en passent à la limite à partir d'approximations par des fonctions en escaliers construites à partir de subdivisions appropriées.

2.2 Primitives

Définition 6. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. Une *primitive* de f est une fonction F définie et dérivable sur $[a\,;b]$ telle que $F' = f$.

Proposition 4. Ensemble des primitives

Toute fonction continue f sur un segment $[a\,;b]$ admet des primitives sur le segment $[a\,;b]$.
Les primitives de f sont les $F+C$ où F est une primitive de f et $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Démonstration. Soit $F : [a\,;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $x \in [a\,;b]$, pour tout h tel que $x+h \in [a\,;b]$ on a :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est continue sur $[a\,;x]$ elle y est bornée et atteint ses bornes. D'après la croissance de l'intégrale :

$$\min_{[x;x+h]} f \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant \max_{[x;x+h]} f$$

Par continuité de f, les membres de gauche et de droite tendent vers $f(x)$ de sorte que le taux d'accroissement de F en x également : F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Si G et F sont des primitives de f, alors $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ sur $[a\,;b]$ donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G - F = C$ donc $G = F + C$. □ □

Remarque 4. La démonstration précédente prouve :

$$\forall f \in \mathcal{C}^k([a\,;b]) \text{ avec } k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\},\ F : [a\,;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto C + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ vérifie } F \in \mathcal{C}^{k+1}([a\,;b]).$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit également que si F et G sont des primitives respectives de f et g sur $[a\,;b]$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$.

Notation 2. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne le nombre $F(x)$, où F est une primitive quelconque de f sur un intervalle.

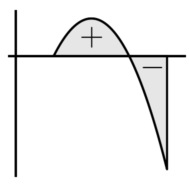
Théorème 5. fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Démonstration. D'après la démonstration de la proposition 4, $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Ainsi, il existe une constante C telle que $G = F + C$. Comme $G(a) = 0$, on en déduit : $C = -F(a)$. Ainsi, l'intégrale qui nous intéresse est $G(b) = F(b) - F(a)$. □

2.3 Interprétations de l'intégrale

Remarque 5 (Aire sous une courbe). Si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b])$ a pour courbe représentative C_f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est

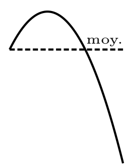


- ⋆ l'aire du domaine situé sous C_f, au dessus de (Ox), entre $x = a$ et $x = b$ si $f \geqslant 0$.
- ⋆ sinon, il s'agit de l'aire algébrique du domaine située entre C_f, (Ox), $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est exprimée en unités d'aires : $\|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$.

Remarque 6 (Valeur moyenne). Si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b])$ la valeur moyenne de la fonction f entre a et b est le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Remarque 7 (Longueur de courbe). Dans le chapitre §5, on a vu que si $\vec{g}$ est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}_1$ sur un intervalle I, la *longueur* du support de $\vec{g}$ entre les points de paramètres $t_1 \in I$ et $t_2 \in I$ $(t_2 > t_2)$ est :

$$L(\vec{g}, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{g}\,'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

2.4 Utilisation des propriétés de l'intégrale

On rappelle que la proposition 1 est valable pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.

Exemple 3. ✎ *Linéarité.* Rappeler la dérivée de $x \mapsto x^k$ ($k \in \mathbb{N}$). En déduire une primitive de cette fonction puis l'ensemble des primitives de $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 7x + 3$.

Exemple 4. ✎ *Relation de Chasles.* Calculer la valeur moyenne de $t \mapsto |t|$ sur $[1\,;3]$.

Exemple 5. ✎ *Positivité et linéarité.* Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b]) \times \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a\,;b]),\ \left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

On pourra appliquer la positivité à $\int_a^b (\lambda f + g)^2$ pour en utilisant la linéarité, montrer qu'il s'agit d'un trinôme de discriminant positif et écrire ce discriminant.

3. Méthodes de calcul

3.1 Intégration par parties

Proposition 6. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a\,;b]$. On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Comme u et v sont dérivables sur $[a\,;b]$, $(uv)' = u'v + v'u \iff u'v = (uv)' - v'u$ ce que l'on peut intégrer sur $[a\,;b]$, car par hypothèse, les deux membres sont continus. □

Exemple 6. ✎ Calculer : ① $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ ② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan x\,\mathrm{d}x$ ③ $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Exemple 7. ✎ L'intégration par parties permet aussi le calcul de primitives : $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 8. ✎ Soit $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b])$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$.

3.2 Changement de variable

Proposition 7. Changement de variable

Soient φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et f une fonction continue sur un segment contenant $\varphi([a\,;b])$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

On dit que l'on a effectué le changement de variables $u = \varphi(t)$.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur un segment contenant $\varphi([a\,;b])$ (F existe par continuité de f). Le membre de droite vaut $[F(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ et celui de gauche $[F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ car $F \circ \varphi$ a pour dérivée $t \mapsto F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ par dérivation des fonctions composées. □

Exemple 9. ✎ Au moyen d'un changement de la forme $u = \dots$ (que l'on déterminera après avoir mis le dénominateur sous forme canonique), calculer :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

Exemple 10. ✎ Au moyen du changement de variable $x = \sin u$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Interpréter le résultat en terme d'aire.

Exemple 11. ✎ Le changement de variable permet aussi le calcul de primitives. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, calculer :
① $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ ② $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ③ $\displaystyle\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$.

3.3 Méthodes adaptées à certaines fonctions

Exemple 12. ✎ Pour intégrer un polynôme trigonométrique, on le linéarise : $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 13. ✎ Pour intégrer une fraction trigonométrique f, on effectue un changement de variables suivant

- ⋆ si $f(t)\,\mathrm{d}t$ est invariant par $t \mapsto -t$: $u = \cos t$.
- ⋆ si $f(t)\,\mathrm{d}t$ est invariant par $t \mapsto \pi - t$: $u = \sin t$.
- ⋆ si $f(t)\,\mathrm{d}t$ est invariant par $t \mapsto \pi + t$: $u = \tan t$.
- ⋆ sinon : $u = \tan \frac{t}{2}$.

Calculer une primitive de $\dfrac{1}{\cos}$.

Exemple 14. ✎ Pour intégrer une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples (on traitera l'exemple suivant dans le cadre du chapitre §13) : $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^8+1}{x^7+x^3}\,\mathrm{d}x$.

3.4 Primitives remarquables

$f(x)$	Intervalles	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	g	$\int g$
$k\ (\in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	kx	ku'	ku
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$u^n u'$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(u)u'$	$\mathrm{ch}(u)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(u)u'$	$\mathrm{sh}(u)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}\,;k\pi + \frac{\pi}{2}[: k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$		

u est définie et dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans l'un des intervalles de la deuxième colonne.

TD du § 12

Exercice 1. Changement de variable et intégration par parties
Calculer l'intégrale :

① $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$ ③ $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\cos(x^2)\mathrm{d}x$ ④ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2. Intégrale d'un polynôme trigonométrique ATS 2008

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x)^3(\cos x)^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 3. Intégrale d'une fonction irrationnelle ATS 2010

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+5}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4. Intégrale avec arc tangente ATS 2007

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 t^2\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 5. Intégration par parties : bien choisir la constante d'intégration ! ATS 2013

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 6. Primitive de l'inverse de $x\ln x$ ATS 2009

Calculer : $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 7. Encadrement d'une suite définie par une intégrale ATS 2008

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{2-x}\,\mathrm{d}x$. Calculer sa limite en l'infini.

Exercice 8. Fonction définie par une intégrale de bornes variables.

Pour $x\in\mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

① Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{-2x}\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln 2$. Établir un résultat analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.
② Utiliser cette inégalité pour étudier les limites de f, puis pour montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.
③ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée. Étudier la dérivabilité de f en 0.
④ Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 9. Suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

① Étudier la monotonie de la suite (I_n), puis sa convergence.
② Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
③ En déduire la limite, puis un équivalent de (I_n).

Exercice 10. Irrationalité de e
On souhaite obtenir une suite qui converge vers e, et démontrer l'irrationalité de ce dernier.

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

① Calculer I_0.
② Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 < I_n < \dfrac{1}{n!}$. En déduire la limite de (I_n).
③ Trouver une relation de récurrence liant I_{n+1} et I_n, pour tout entier naturel n.
④ Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. En déduire $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.
⑤ À partir de l'encadrement de la seconde question, montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n < n!\,\mathrm{e} < a_n+1$ où $a_n\in\mathbb{N}$.
En raisonnant par l'absurde, démontrer que e est un nombre irrationnel : $e\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 11. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n-ème intégrale de Wallis est $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

On souhaite évaluer ces intégrales et connaître leur comportement asymptotique.

① Calculer w_0. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

② En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, $w_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ et $w_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$, puis la valeur de $w_n w_{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

③ Montrer que (w_n) est strictement positive et décroissante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1$.

④ Déduire de ce qui précède $w_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} w_n$ puis $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 12. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue et croissante sur $[a\,;b]$, où $a < b$. On considère les sommes de Riemann :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n^- = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_n^+ = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

① Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^- \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_n^+$. Interpréter graphiquement ce résultat.

② Calculer la limite de $S_n^+ - S_n^-$. En déduire que (S_n^+) et (S_n^-) convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

③ Application : calculer au moyen d'une intégrale : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ (factoriser par n^2 au numérateur et au dénominateur)

Exercice 13. Lemme de Lebesgue et application

Soient $a < b$ réels. On souhaite démontrer le lemme de Lebesgue : si $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b], \mathbb{C})$ alors $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0$, et l'utiliser pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

① Démontrer le lemme de Lebesgue au moyen d'une intégration par parties.

② Trouver deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_a^b (ax^2 + bx)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

③ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0\,;\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

④ Montrer à partir de ce qui précède que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = -\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$ où φ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\pi]$ qui se prolonge en 0 de façon $\mathcal{C}^1$.

⑤ Conclure à l'aide du lemme de Lebesgue.

Exercice 14. Équation linéaire d'ordre 1 avec second membre ATS 2003

Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = \ln x$.

Bilan du § 12

Prérequis

① Fonctions usuelles : tout ! §3 Fonctions usuelles . . . . ☐
② Équations différentielles : (section 2.1, le reste pour les applications) §7 Équations différentielles . . . . . ☐

Objectifs prioritaires

① connaître les primitives classiques (section 3.4) . . . . ☐
② savoir intégrer par partie (section 3.1 . . . . ☐
  (a) exemples 6, 7 et 8 . . . . ☐
  (b) exercices 1, 5, 9, 10, 13 . . . . ☐
③ savoir effectuer un changement de variable (section 3.2) . . . . ☐
  (a) exemples 9, 10 et 11 . . . . ☐
  (b) exercices 2 à **??** . . . . ☐
④ connaître les propriétés de l'intégrale (proposition 1) . . . . ☐
  (a) voir les exemples de la section 2.4 . . . . ☐
  (b) exercices 7, 8 et 9, et à partir de l'exercice 10 . . . . ☐
⑤ connaître les interprétations de l'intégrale (section 2.3) . . . . ☐
⑥ connaître les liens entre primitive et intégrale (remarque 4 et théorème 5) . . . . ☐

Objectifs secondaires

① connaître les méthodes spécifiques d'intégration (section 3.3) . . . . ☐
② savoir ce qu'est une fonction en escaliers, une fonction continue par morceaux . . . . ☐

Approfondissement

① comprendre la construction de l'intégrale à partir du théorème d'approximation uniforme (section 2.1) ☐