§ 11 : Espaces vectoriels

1. Concepts fondamentaux

1.1 Notion d'espace vectoriel

Notation 1. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont des entiers naturels non nuls.

Définition 1. Un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$,

$$+ : \left\{ \begin{array}{lcl} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array} \right. \quad \text{et} \cdot : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda u \end{array} \right.$$

qui satisfont les huit axiomes suivants est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

① $+$ est associative : $\forall (u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$.
② élément neutre 0_E : $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$.
③ opposé : $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ v+u = u+v = 0_E$. On note : $v = -u$.
④ commutativité de $+$: $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v = v+u$.
⑤ $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall u \in E,\ (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.
⑥ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v) \in E^2,\ \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.
⑦ $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall u \in E,\ \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
⑧ $\forall u \in E,\ 1u = u$.

Exemple 1. Les propriétés des opérations usuelles font du corps des réels $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
De même, le corps des complexes $\mathbb{C}$ est à la fois un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Exemple 2. $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni des lois suivantes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
$$\forall u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall v \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ u+v \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda u \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$
On indique par : $(+)$ la définition de la somme, $(\cdot)$ l'usage de la définition du produit externe, et $(\mathbb{R})$ celui de propriétés de $\mathbb{R}$ dans les coordonnées. On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall v \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall w \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

① : $(u+v)+w \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} (x+x')+x'' \\ (y+y')+y'' \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x+(x'+x'') \\ y+(y'+y'') \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+x'' \\ y'+y'' \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} u+(v+w)$.

④ : $u+v \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x'+x \\ y'+y' \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} v+u$.

② : soit $0_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a : $u + 0_E \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+0 \\ y+0 \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \overset{④}{=\!=} 0_E + u$

③ : soit $v \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. On a : $u+v \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+(-x) \\ y+(-y) \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_E \overset{④}{=\!=} v+u$

⑤ $(\lambda+\mu)u \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)x \\ (\lambda+\mu)y \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x \\ \lambda y + \mu y \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \lambda u + \mu u$.

⑥ $\lambda(u+v) \overset{(+)}{=\!=} \lambda \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda(x+x') \\ \lambda(y+y') \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda x' \\ \lambda y + \lambda y' \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \lambda u + \lambda v$.

⑦ $\lambda(\mu u) \overset{(\cdot)}{=\!=} \lambda \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda(\mu x) \\ \lambda(\mu y) \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} (\lambda\mu)x \\ (\lambda\mu)y \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} (\lambda\mu)u$.

⑧ $1u \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} 1x \\ 1y \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u$.

Exemple 3. (Fondamental) En généralisant la démonstration de l'exemple 2 :

⋆ $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\star$ L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices $n \times p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\star$ L'ensemble des fonctions $\mathbb{K}^I$ d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\star$ L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\star$ $\{0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\star$ plus généralement, le produit cartésien $E \times F$ de deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Notion d'application linéaire

Définition 2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $L : E \to F$ est dite *linéaire* si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in E \times E,\ L(\lambda u + v) = \lambda L(u) + L(v)$$

L'image par une application linéaire d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. (Il s'agit aussi d'un espace vectoriel !)

Exemple 4 (Matrices). Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Vérifier que $L : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ X \mapsto AX$ est une application linéaire (l'application linéaire dite *canoniquement* associée à la matrice A).

Remarque 1. En particulier, si $L : E \to F$ est linéaire, $L(0_E) = 0_F$.

Exemple 5 (de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$). On considère les applications suivantes. Lesquelles sont linéaires ?

① $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$ ② $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$ ③ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ④ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

⑤ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ ⑥ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-2y \\ y-x \end{pmatrix}$ ⑦ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

⑧ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⑨ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exemple 6 (Fonctions). Montrer que les applications suivantes sont linéaires

① $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ y \mapsto (x \mapsto \frac{1}{2}(y(x) + y(-x))$

② $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ y \mapsto y'' + y$

③ $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ y \mapsto y(2)$

④ $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 7 (Suites). Montrer que l'application définie sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à valeurs complexes, $s : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire.

Proposition 1.

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires. Alors la composée $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ est aussi une application linéaire.

Démonstration. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in E \times E,\ g \circ f(\lambda u + v) \xlongequal{f \text{ linéaire}} g(\lambda f(u) + f(v)) \xlongequal{g \text{ linéaire}} \lambda g \circ f(u) + g \circ f(v)$.
La composée de g et f est linéaire. □

1.3 Notion de sous–espace vectoriel

Définition 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n vecteurs $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et n scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
Le vecteur : $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.

Définition 4. Un sous-ensemble F non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, stable par combinaison linéaires finies, est un *sous-espace vectoriel* de E.

Méthode 1. Reconnaître un sous-espace vectoriel

Pour montrer qu'un sous ensemble F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel, on vérifie que :

① $0_E \in F$ (ce qui prouve que $F \neq \varnothing$)

② $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u,v) \in F \times F$, on a : $\lambda u + v \in F$. (stabilité par combinaisons linéaires)

le second point équivaut à la stabilité de F par combinaisons linéaires (récurrence immédiate).

⚠ les quantificateurs $\forall$ sont indispensables pour que la démonstration ait un sens.

Exemple 8 (Plan). Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (et les reconnaître) :

① $D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0 \right\}$ ② $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1 \right\}$ ③ $D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x = y \geqslant 0 \right\}$

Exemple 9 (Espace). Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (et les reconnaître) :

① $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 0 \right\}$ ② $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ ③ $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Exemple 10 (Espaces associés à une matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Vérifier que le noyau et l'image de A sont des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$.

Exemple 11 (Suites). Dire les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles :

① $\{(u_n) \in S,\ (u_n) \text{ converge}\}$

② $\{(u_n) \in S,\ \lim u_n = 1\}$

③ $\{(u_n) \in S,\ (u_n) \text{ croissante}\}$

④ $\{(u_n) \in S,\ (u_n) \text{ bornée}\}$

⑤ $\{(u_n) \in S,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\}$

⑥ $\{(u_n) \in S,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2\}$

Exemple 12 (Fonctions). Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

① $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ② $\{f \in \mathcal{F},\ f(2015) = 0\}$ ③ $\{y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y''' + 2y'' - 4y = 0\}$ ④ $\{f \in \mathcal{F},\ f \text{ impaire}\}$

Remarque 2. Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. La plupart du temps, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on montrera qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des espaces de référence de l'exemple 3.

2. Base et dimension d'un espace vectoriel

2.1 Sous-espace engendré par un famille de vecteurs

Proposition 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n vecteurs de E : $u_1, \ldots, u_n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E. On le note

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n :\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, on dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une *famille génératrice* de F, ou un *système de générateurs* de F, ou encore qu'elle *engendre* F.

Démonstration. $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ contient $0u_1 + \cdots + 0u_n = 0_E$: il est non vide.

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u,v) \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \times \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, par définition :

$\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ et $\exists (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n, v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ donc

$\lambda u + v = \lambda(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = (\lambda\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \cdots + (\lambda\alpha_1 + \beta_n)u_n \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Donc $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de E. □

Notation 2. Par convention, si $n = 0$, $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

On note également $\mathbb{K}u = \mathrm{Vect}(u)$. (l'espace engendré par un vecteur est formé de ses multiples).

EXEMPLE 13 (Espace). On considère les vecteurs $u = {}^t(1\,;0\,;0)$ et $v = {}^t(1\,;1\,;1)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Décrire $\mathrm{Vect}(u, v)$ par une équation. Interpréter le résultat.

Trouver une famille génératrice des espaces de l'exemple 9.

EXEMPLE 14 (Suites). Soit $u = (u_n)$ le vecteur du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 1$. Décrire $\mathrm{Vect}(u)$.

EXEMPLE 15 (Fonctions). Soit $E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ y'' + y = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer un système générateur de F.

EXEMPLE 16 (Polynômes). Quelle est la forme générale d'un vecteur du sous-espace des fonctions $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, défini par $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n)$ (où $X : x \mapsto x$) ?

REMARQUE 3. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, une droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel engendré par n'importe lequel de ses vecteurs directeurs.

Dans $\mathbb{R}^3$, un plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriels engendré par un système de deux vecteurs directeurs non colinéaires.

REMARQUE 4. On peut également considérer un espace vectoriel engendré par une famille infinie de vecteurs : les vecteurs de cet espace engendré sont alors les combinaisons linéaires *finies* du système infini de générateurs.

Ainsi, le sous–espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$) défini par $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots)$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

2.2 Famille libre de vecteurs

DÉFINITION 5. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La famille est *libre* si et seulement si toute combinaison linéaire nulle de ses vecteurs a des coefficients tous nuls :

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Cela signifie que l'équation d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$ a pour seule solution $(0, \dots, 0)$.

Une famille qui n'est pas libre est dite *liée*. Deux vecteurs liés sont *colinéaires*, trois vecteurs liés sont *coplanaires*.

EXEMPLE 17 (Espace). Lesquelles des familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^3$? Interpréter.

① $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ ② $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)$ ③ $\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\\sqrt{8}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ ④ $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ ⑤ $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

2.3 Bases et dimension

DÉFINITION 6. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille ordonnée de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La famille $\mathcal{B}$ est une *base* de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.

Lorsqu'un espace vectoriel possède une base finie, il est dit *de dimension finie.* (1)

EXEMPLE 18. On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ composée des vecteurs e_i dont toutes les composantes sont nulles, sauf la composante i qui vaut 1, est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est composée de $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

EXEMPLE 19 (Espace). Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, lesquelles sont libres ? Génératrices ? Forment une base ?

① $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ ② $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ ③ $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ ④ $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

(1). Une famille infinie est libre lorsque toute ses sous-familles finies sont libres. Elle est génératrice lorsque tout vecteur est combinaison linéaire finie de ses membres. C'est une base lorsqu'elle est libre et génératrice.

Proposition 3.

La famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E si et seulement

$$\forall y \in E,\ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Cela signifie que chaque vecteur de E est s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de la base. Les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les *composantes* du vecteur y dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. L'existence d'une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ à l'équation $y = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ vient du fait que $\mathcal{B}$ est génératrice. Si $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ vérifie également $y = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$, la différence des deux équations $0_E = (\lambda_1 - \mu_1) u_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) u_n$ implique $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0$ par liberté de $\mathcal{B}$. Ainsi la solution est unique. □

Proposition 4. Dimension

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :

- ⋆ il n'existe pas de famille libre à plus de n éléments.
- ⋆ il n'existe pas de famille génératrice de moins de n éléments
- ⋆ toute base a exactement n éléments.

Ce nombre n est appelé la *dimension* de E et noté $\dim(E)$.

Démonstration. Soient $n+1$ vecteurs de E : $v_1, \dots, v_{n+1}$. En considérant les composantes suivant chaque u_i de l'équation $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n+1} = 0_E$, on obtient un système de $n+1$ équations à n inconnues, qui contient au maximum n pivots, donc un paramètre au moins : il n'y pas unicité des solutions, la famille n'est pas libre.

De même, avec $n-1$ vecteurs de E : $v_1, \dots, v_{n-1}$: les composantes suivant les u_i de l'équation $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$, donnent un système de n équations à $n-1$ inconnues, qui contient au maximum $n-1$ pivots, donc au moins une ligne de zéros : les y ne satisfaisant pas l'équation associée ne peuvent se décomposer suivant les v_i, la famille n'est donc pas génératrice.

Une famille libre n'a pas plus de n éléments, une famille génératrice pas moins de n, donc une base en a n. □

Notation 3. Par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est nulle : $\dim(\{0\}) = 0$.

Un espace vectoriel E est une *droite vectorielle* si $\dim E = 1$, un *plan vectoriel* si $\dim E = 2$.

En cas d'ambiguïté, on précise le corps de référence en indice de dim : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Exemple 20 ($\mathbb{K}^n$). Quelle est la dimension de $\mathbb{K}^n$?

Exemple 21 (Fonctions). Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' + y = 0$ est un plan vectoriel. En déduire que la famille formée des fonctions $x \mapsto \sin(x+a)$, $x \mapsto \sin(x+b)$ et $x \mapsto \sin(x+c)$ est liée pour tous $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.

Proposition 5. Reconnaître une base

Soit $\mathcal{B}$ une famille d'un espace vectoriel de dimension n. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ⋆ $\mathcal{B}$ est une base.
- ⋆ $\mathcal{B}$ est une famille libre à n éléments.
- ⋆ $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n éléments.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}'$ une base de E. On note $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Les composantes suivant $\mathcal{B}'$ de l'équation $y = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ mènent à un système de n équations à n inconnues. Dans les deux dernières situations, ce système admet n pivots exactement (car l'équation $0 = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ admet une solution unique si $\mathcal{B}$ libre, et l'équation initiale admet au moins une solution si $\mathcal{B}$ génératrice). Ainsi, le système admet une unique solution : $\mathcal{B}$ est une base. La réciproque est vraie d'après la proposition 4 □

Théorème 6. Sélection - complétion

De toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie E, on peut extraire une base.
Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie E peut être complétée en une base.

Démonstration. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille génératrice de E : pour tout $y \in E$ l'équation admet au moins une solution. On résout $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = y$ par la méthode du pivot : la famille $\mathcal{P}$ constituée des vecteurs correspondants aux colonnes à pivot est une base (génératrice : en choisissant les paramètres égaux à 0 on obtient $y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{P})$ et libre : le système admet une unique solution : autant de pivots que de colonnes).

Si E est de dimension finie p et $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre, soit $n = p$ et c'est une base, soit $n < p$ et en prenant $u_{n+1} \in E \setminus \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ on complète la famille en une famille libre de $n+1$ vecteurs. En répétant l'opération $n - p$ fois on obtient une famille libre à p éléments, donc une base. □

Remarque 5. Cela implique en particulier que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Pour compléter une famille libre $(u_1, \dots, u_k)$ en une base de E de dimension finie, on considère une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et on résout $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ en commençant par prendre les k premiers pivots dans les k premières colonnes. Les colonnes à pivot forment une base contenant la famille initiale.

2.4 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 7. Intersection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection de F et G, $F \cap G = \{u \in E \text{ tels que } u \in F \text{ et } u \in G\}$, est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous les deux 0_E, donc $0_E \in F \cap G$. Par ailleurs, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u, v) \in (F \cap G) \times (F \cap G)$, on a $(u, v) \in F \times F$, et F étant un sous-espace vectoriel : $\lambda u + v \in F$. De même, $\lambda u + v \in G$, donc $\lambda u + v \in F \cap G$. Ainsi $F \cap G$ est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de E. □

Proposition 8. Somme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la *somme* des espaces F et G, définie par $F + G = \{u + v,\ u \in F,\ v \in G\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
En particulier, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_n$.

Démonstration. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous les deux 0_E, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$. Par ailleurs, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u, v) \in (F+G) \times (F+G)$, il existe $(f_1, g_1) \in F \times G$, $(f_2, g_2) \in F \times G$ tels que $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$. Ainsi, $\lambda u + v = \lambda(f_1 + g_1) + f_2 + g_2 = (\lambda f_1 + f_2) + (\lambda g_1 + g_2) \in F + G$. Donc $F + G$ est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en *somme directe* dans E, et l'on note $E = F \oplus G$, si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

L'espace G est un espace *supplémentaire* de F dans E.

Exemple 22. On considère $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, montrer que l'on a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Proposition 9.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- ⋆ $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
- ⋆ si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$

Démonstration. Une base $\mathcal{B}$ de F est une famille libre à $\dim E$, que l'on peut compléter en une base de E. Donc $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Si une base de F a $\dim(E)$ éléments, c'est une famille libre à $\dim(E)$ éléments, donc une base de E. Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$. □

Proposition 10. Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En particulier, $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. L'idée est de compléter une base de $F \cap G$ d'une part en une base de F, et d'autre part en une base de G. On montre alors que les $\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ considérés forment une base de $F + G$. $\square$

3. Applications linéaires

3.1 Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 11. Noyau

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F. L'ensemble des solutions de l'équation $L(x) = 0_F$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Ker}(L)$:

$$\mathrm{Ker}(L) = \{x \in E,\ L(x) = 0_F\} \subset E$$

Ce sous-espace vectoriel de E est appelé le *noyau* de l'application linéaire L.

Démonstration. L étant linéaire : $L(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \mathrm{Ker}(L)$: le noyau est non vide.

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in \mathrm{Ker}(L) \times \mathrm{Ker}(L)$, on a : $L(\lambda u + v) \overset{L \text{ linéaire}}{=\!=} \lambda L(u) + L(v) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$ car u et v sont dans le noyau de L. Donc $\lambda u + v \in \mathrm{Ker}(L)$: le noyau est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Méthode 2. Générateurs du noyau

Rechercher le noyau d'une application linéaire, c'est résoudre l'équation $L(x) = 0$. Lorsque E et F sont de type $\mathbb{K}^n$, cela se fait par la méthode du pivot de Gauss, qui permet d'obtenir un système paramétrique puis de générateurs (et même une base) du noyau. La description de $\mathrm{Ker}(L)$ avec des équations est immédiate en écrivant $L(x) = 0$.

Exemple 23. Rechercher les noyaux des applications linéaires des exemples 5 ⑦ et 6 ②.

Proposition 12. Image

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F. L'ensemble des images $L(u)$ où $u \in E$, est un sous-espace vectoriel de F, noté $\mathrm{Im}(L)$:

$$\mathrm{Im}(L) = \{L(u),\ u \in E\} \subset F$$

Ce sous-espace vectoriel de F est appelé l'*image* de l'application linéaire L.

Démonstration. Comme $L(0_E) = 0_F$, 0_F appartient à l'image de L qui est non vide.

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in \mathrm{Im}(L) \times \mathrm{Im}(L)$, par définition, il existe $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $u = L(x)$ et $v = L(x')$. Ainsi, $\lambda u + v = \lambda L(x) + L'(x') \overset{L \text{ linéaire}}{=\!=} L(\lambda x + x') \in \mathrm{Im}(L)$: l'image est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sous-espace vectoriel de F. $\square$

Méthode 3. Équation linéaire de l'image

si $E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$, alors $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Vect}(L(u_1), \ldots, L(u_k))$: on obtient facilement un système générateur de l'image d'une application linéaire. Pour obtenir une description par des équations linéaires dans le cas où E et F sont de type $\mathbb{K}^n$, on résout $y = L(x)$ avec la méthode du pivot de Gauss : les lignes de zéros donnent des conditions nécessaires à l'existence de solution sous forme d'équations.

Exemple 24. Rechercher les images et les noyaux des applications linéaires des exemples 5 ④, ⑥ et ⑨, des exemples 6 ①, ③ et de l'exemple 7.

3.2 Applications linéaires particulières

Définition 8. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire :

⋆ L est un *endomorphisme* si et seulement si $F = E$.

- $\star$ L est un *isomorphisme* si et seulement si $\mathrm{Ker}(L) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(L) = F$. (L bijection linéaire)
- $\star$ L est un *automorphisme* est un endomorphisme et un automorphisme. (bijection linéaire de E dans E)

Remarque 6. On vérifie qu'un isomorphisme est une bijection : comme $\mathrm{Im}(L) = F$, L est surjective et si $L(u) = L(v)$, par linéarité, $L(u - v) = 0$ donc $u - v \in \mathrm{Ker}(L) = \{0_E\}$: $u = v$. Ainsi, L est injective.

Proposition 13.

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors la bijection réciproque $L^{\langle -1 \rangle}$ est aussi une application linéaire : $L^{\langle -1 \rangle} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (u, v) \in F \times F$, comme L est bijective, il existe u' et v' uniques dans E tels que $u = L(u')$ et $v = L(v')$. Ainsi, $L^{\langle -1 \rangle}(\lambda u + v) = L^{\langle -1 \rangle}(\lambda L(u') + L(v')) = L^{\langle -1 \rangle} \circ L(\lambda u' + v') = \lambda u' + v' = \lambda L^{\langle -1 \rangle} \circ L(u') + L^{\langle -1 \rangle} \circ L(v') = \lambda L^{\langle -1 \rangle}(u) + L^{\langle -1 \rangle}(v)$: $L^{\langle -1 \rangle}$ linéaire. □

Remarque 7. L'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E, noté $\mathrm{GL}(E)$, est un groupe pour la composition (stable, associatif, d'élément neutre l'identité Id et tout automorphisme a une réciproque).

3.3 Équations linéaires

Définition 9. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F et $b \in F$. L'équation d'inconnue $x \in E$: $u(x) = b$ est appelée *équation linéaire*. Le vecteur b est le *second membre* de l'équation linéaire. Une équation linéaire est dite *homogène* lorsque elle est sans second membre : $u(x) = 0_F$.

Proposition 14. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Soit $b \in F$.

① l'ensemble des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u)$.

② (structure des solutions d'une équation linéaire) si x_0 est une solution particulière de l'équation linéaire $u(x) = b$, l'ensemble des solutions de cette équation est $x_0 + \mathrm{Ker}(u)$ (solution particulière plus solutions de l'équation sans second membre).

③ (principe de superposition) si x_1 vérifie $u(x_1) = b_1$ et x_2 vérifie $u(x_2) = b_2$, alors $x_1 + x_2$ est une solution particulière de l'équation linéaire $u(x) = b_1 + b_2$.

Démonstration. ① : c'est la définition du noyau. ③ $b_1 + b_2 = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1 + x_2)$.
② $u(x) = b \iff u(x) - u(x_0) = b - u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(u) \iff x \in x_0 + \mathrm{Ker}(u)$.

Exemple 25. Donner deux exemples dans des espaces différents qui illustrent la proposition 14.

3.4 Dimension et applications linéaires

Exemple 26. Montrer que l'image d'une base $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E par un isomorphisme $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est une base de F.

Théorème 15. « du rang »

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels E et F de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L))$$

La dimension $\mathrm{rg}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$ est appelée le rang de L.

Démonstration. Soit E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(L)$ dans E : $E = E' \oplus \mathrm{Ker}(L)$. On considère $L' : E' \to \mathrm{Im}(L)$ la restriction de L à E'. On démontre qu'il s'agit d'un isomorphisme et on utilise la formule de Grassmann. □

Exemple 27. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Que dire de L si :

① $\dim(F) = \mathrm{rg}(L)$? ② $\dim(E) = \mathrm{rg}(L)$? ③ $\dim(E) = \dim(F) = \mathrm{rg}(L)$?

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

4. Matrice d'une application linéaire

4.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie p, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Pour tout $u \in E$, on appelle *vecteur des coordonnées* de u dans la base $\mathcal{B}$ (que l'on note parfois $[u]^{\mathcal{B}}$) l'unique élément de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tel que $u = x_1\, e_1 + \cdots + x_p\, e_p$.

Exemple 28 (Plan). ✎ Soient dans $E = \mathbb{R}^2$ les trois vecteurs : $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis donner $[e_1]^{\mathcal{E}}$, $[e_2]^{\mathcal{E}}$ et $[u]^{\mathcal{E}}$.

Exemple 29 (Polynômes). ✎ Dans $\mathbb{R}^2[X]$, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique. Donner $[(X-2)^2]^{\mathcal{B}}$.

Remarque 8. L'application $\mathsf{C}_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n,\ u \mapsto [u]^{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

4.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 11. Soient :

- ⋆ E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
- ⋆ F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

La *matrice dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée* d'une application linéaire f de E dans F, est la matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, dont la j-ème colonne est le vecteur $[f(e_j)]^{\mathcal{B}'}$ des composantes de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!],\ f(e_j) = a_{1j}\, e'_1 + \cdots + a_{nj}\, e'_n$$

On notera cette matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou encore $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Remarque 9. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée se présente ainsi :

$$\begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple 30 (Plan). ✎ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2y \\ x+3y \end{pmatrix}$. Et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$; $X = [u]^{\mathcal{B}}$ et $Y = [f(u)]^{\mathcal{B}}$. Vérifier que $Y = AX$.

Exemple 31 (Polynômes). ✎ On munit $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}$ respectivement des bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et (1).
Soient $\Delta : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X],\ P \mapsto P(X+1) - P(X)$ et $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(1)$.
Calculer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\Delta)$; $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(e)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(e \circ \Delta)$. Vérifier que $C = BA$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^p \arrow[r, "{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}"] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}'}^{\langle -1 \rangle}"] \\
E \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "f"'] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^p \arrow[r, "{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}"] \arrow[rr, bend right, "{[g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "{[g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}''}^{\langle -1 \rangle}"] \\
E \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"'] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^p \arrow[d, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}}^{\langle -1 \rangle}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[l, "{([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}}"'] \\
E & F \arrow[l, "f^{\langle -1 \rangle}"] \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 16. Composition

- $\star$ E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
- $\star$ F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.
- $\star$ G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m, muni d'une base $\mathcal{B}'' = (e''_1, \dots, e''_m)$.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $u \in E$. On a alors :

① $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_p$ ou encore $[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}_p$.

② $[f(u)]^{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [u]^{\mathcal{B}}$

③ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f)$ ou encore $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

④ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{\langle -1 \rangle}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\big)^{-1}$ ou encore $[f^{\langle -1 \rangle}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = ([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$

⑤ $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\big) = \mathrm{rg}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Démonstration. ① : $[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ a pour colonnes les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ qui sont les composantes des vecteur de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

② Si $u = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$, par linéarité, $f(u) = x_1 f(e_1) + \dots + x_p f(e_p)$. Or les coordonnées du second membre dans $\mathcal{B}'$ sont par définition du produit matriciel : $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [u]^{\mathcal{B}}$.

③ $\forall u \in E$, $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} [u]^{\mathcal{B}} = [g \circ f(u)]^{\mathcal{B}''} = [g(f(u))]^{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f(u)]^{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [u]^{\mathcal{B}}$ donc $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

④ $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} ([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \mathrm{Id}_n = [f \circ f^{\langle -1 \rangle}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [f^{\langle -1 \rangle}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. On conclut en composant à gauche par $([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$. □

4.3 Changement de base

Tous les résultats de cette section viennent de la proposition 16.

Proposition 17. Coordonnées de vecteurs et changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E. Alors :

$$\forall u \in E,\ [u]^{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [u]^{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)^{-1} \quad \text{ou} \quad [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}.$$

Notation 4. ⚠ Dans la situation précédente, on note souvent $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ et $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Id}_E = [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. De façon antinaturelle, on dit que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, alors que $X' = P^{-1}X$ où X et X' sont les coordonnées respectives d'un vecteurs $u \in E$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Proposition 18. Matrice d'application linéaire et changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathcal{F}' = (f'_1, \dots, f'_n)$ deux bases de F.
Soit L une application linéaire de E dans F. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(L) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathrm{Id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(L)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) \text{ ou } \boxed{[L]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{F}'} = [\mathrm{Id}_F]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} [L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}}$$

Remarque 10. Ainsi, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est la matrice d'un endomorphisme de E dans une base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée et si $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée est $P^{-1}AP$.

Exemple 32. On considère l'endomorphisme f de l'exemple 30. Et les vecteurs $e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ (au départ et à l'arrivée).
De manière générale, s'il existe $B \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ tel que $B = P^{-1}AP$, les matrices A et B sont dites *semblables*, A et B sont alors les matrices d'une même application linéaire dans deux bases.

TD du § 11

Exercice 1. Générateurs d'une intersection
Soient dans $\mathbb{R}^3$: $a\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $b\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $d\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Donner un système de générateurs de $\mathrm{Vect}(a,b)\cap\mathrm{Vect}(c,d)$.

Exercice 2. Sous–espace vectoriel de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables
Dire, en justifiant, si l'ensemble E suivant est un sous–espaces vectoriels du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
① $E=\left\{f\in\mathcal{F},\ f(x)\underset{+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right\}$ ② $E=\{f\in\mathcal{F},\ \exists(a,b)\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a\cos(x+b)\}$
③ $E=\{f\in\mathcal{F},\ f(1)=0\}$ ④ $E=\{f\in\mathcal{F},\ f(0)=1\}$ ⑤ $E=\left\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$

Exercice 3. Primitives et dérivées
Soit $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivable définies sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi : E\to E,\ f\mapsto f'$ et $\psi : E\to E,\ f\mapsto\left(\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

① Vérifier que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
② Montrer que $\varphi\circ\psi=\mathrm{Id}_E$. Que peut–on en déduire pour $\mathrm{Ker}(\psi)$? Pour $\mathrm{Im}(\varphi)$?
Peut–on en déduire que φ est un isomorphisme ?
③ Exprimer, pour toute fonction f de E et tout réel x, le nombre : $\psi\circ\varphi(f)(x)$.
④ Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$. Vérifier que ces deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires.

Exercice 4. Symétrie du plan vectoriel
Soit $\mathcal{L}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x\,;y)\mapsto\left(\dfrac{x+y}{2}\,;\dfrac{3x-y}{2}\right)$.

① Montrer que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme $\mathbb{R}^2$. Déduire du calcul de $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}$ que $\mathcal{L}$ est un automorphisme.
② Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}-\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}+\mathrm{Id})$. Représenter ces espaces et vérifier qu'ils sont supplémentaires.
③ À partir du dessin précédent, expliquer comment construire l'image de $u(x\,;y)$ par l'automorphisme $\mathcal{L}$.
④ Donner une interprétation géométrique de l'automorphisme $\mathcal{L}$.

Exercice 5. Endomorphisme de carré nul
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{L}$ un endomorphisme de E. Montrer que
⋆ $\mathrm{Im}(\mathcal{L})\subset\mathrm{Ker}(\mathcal{L})\iff\mathcal{L}\circ\mathcal{L}=0$
⋆ $\mathrm{Im}(\mathcal{L})=\mathrm{Ker}(\mathcal{L})\iff 2\mathrm{rg}(\mathcal{L})=\dim E$ et $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}=0$

Exercice 6. Les deux structures d'espace vectoriel de $\mathbb{C}$
Dire si l'application suivante est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, puis du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Interpréter géométriquement l'application. ① $z\mapsto z+1$. ② $z\mapsto 2z$ ③ $z\mapsto\bar{z}$ ④ $z\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z$

Exercice 7. Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$
On considère les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$\mathcal{F}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\\frac12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\\frac32\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac12\\1\end{pmatrix}\right)$ $\mathcal{F}_2=\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ $\mathcal{F}_3=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right)$ $\mathcal{F}_4=\varnothing$

$\mathcal{F}_5=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

On définit $G_i=\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_i)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\mathcal{F}_i$, pour tout $i=1,\dots,5$.

① Décrire G_i comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ($i=1,\dots,5$).
② Déterminer une base et la dimension de l'espace G_i, pour $i=1,\dots,5$.

③ Lorsque $G_i \neq \mathbb{R}^4$, compléter la base obtenue de G_i en une base de $\mathbb{R}^4$. ($i = 1, \dots, 5$)
④ Déterminer une base de $G_1 \cap G_3$. En déduire la dimension de $G_1 + G_3$.

Exercice 8. Polynômes de Lagrange
On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur où égal à n.

Soient $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit le polynôme de Lagrange L_k par $L_k(X) = \displaystyle\prod_{i \neq k} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.

① Donner la base canonique et la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$.
② Dans cette question seulement, $n = 2$ et $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$. Écrire les trois polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2. Donner un polynôme P de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = -3$ et $P(3) = 0$.
③ Vérifier que $\forall k \in \{0, \dots, n\},\ L_k \in \mathbb{C}_n[X]$.
④ Montrer que $\mathcal{B} = \{L_0, \dots, L_n\}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
⑤ En déduire que deux polynômes de degrés inférieur où égal à n qui coïncident en $n+1$ valeurs de la variable sont égaux.

Exercice 9. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $E_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = a \right\}$ et $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix}$.

① Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que E_a soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
② Démontrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
③ Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(L)$. L'application L est-elle injective ? surjective ?
④ Déduire de ce qui précède la dimension de l'image de L. Vérifier que $\mathrm{Im}(L) \subset E_0$, puis que $\mathrm{Im}(L) = E_0$.
⑤ Montrer que $\mathrm{Im}(L) \oplus \mathrm{Ker}(L) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Espace des exponentielles-polynômes de degrés 2
Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x$ où a, b, c sont réels.

① Montrer que E est un sous espace-vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
② Déterminer une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E.
③ Soit $\mathcal{L} : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto f'$. Vérifier que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme.
④ Donner la matrice A de l'endomorphisme $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A^{-1}.
⑤ Trouver une primitive de $x \mapsto (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x$.

Exercice 11. Endomorphisme d'un espace de polynômes ATS 2014
Soit $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$, $P(X) \mapsto f\big(P(X)\big) = P(X) - XP'(X)$.

① Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
② Donner la matrice de f dans une base au choix, que l'on précisera.
③ Donner une base du noyau de f.
④ Donner la dimension et une base de l'image de f.

Exercice 12. Endomorphisme de l'espace donné par sa matrice
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\varepsilon_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Enfin, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.

① Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
② Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
③ Donner une base de l'image et du noyau de f.

Exercice 13. Endomorphisme et changement de base
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3x + y - z \\ -x + 5y - 3z \\ 4y - 2z \end{pmatrix}$.

① Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et préciser sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
② Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

③ Déterminer la matrice B de l'application linaire f dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 14. Changement de base d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Montrer que les vecteurs $u\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix}$, $v\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix}$ et $w\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

Soit $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme $\mathcal{L}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ (au départ et à l'arrivée).

Donner la matrice A' de l'application $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{B}'$ (au départ et à l'arrivée).

Exercice 15. Système différentiel linéaire d'ordre 2 guidé

On considère le système différentiel $(S)\left\{\begin{array}{rcr}x'(t)&=&-7x(t)-9y(t)\\y'(t)&=&6x(t)+8y(t)\end{array}\right.$ et les vecteurs $u\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

① Pour t réel on note $X(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de composantes $x(t)$ et $y(t)$.
Montrer que $X'(t)=AX(t)$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à préciser.

② On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Calculer $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$. En déduire la matrice D de φ dans la base (u,v).

③ Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u,v).
Démontrer que $X'=AX \iff Y'=DY$ où $Y=P^{-1}X$.
Résoudre $Y'=DY$ et trouver les composantes $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}(t)$ de Y.

④ Résoudre le système différentiel (S).

Exercice 16. Étude d'un projecteur

Soient $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\-x+2y-2z\\-x+y-z\end{pmatrix}$, et les vecteurs $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

① Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

② Déterminer une base du noyau de φ. L'application φ est-elle un automorphisme ?

③ Déduire de ce qui précède la dimension de $\mathrm{Im}\varphi$. L'endomorphisme φ est-il surjectif ?

④ Démontrer que : $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$.

⑤ Déduire de ce qui précède une base de $\mathrm{Im}\varphi$, et une description de $\mathrm{Im}\varphi$ par des équations linéaires.

⑥ Démontrer que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\varphi$. (le noyau et l'image de φ sont des espaces supplémentaires).

⑦ Prouver que $\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Im}\varphi$. (on rappelle que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ u\mapsto u$)

⑧ Montrer que $\forall u\in\mathrm{Im}\varphi,\ \varphi(u)=u$. Calculer ensuite, pour tout $(u,v)\in\mathrm{Im}\varphi\times\mathrm{Ker}\varphi,\ \varphi(u+v)$.

⑨ En déduire que $\varphi\circ\varphi=\varphi$: on dit que φ est un projecteur sur $\mathrm{Im}\varphi$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\varphi$.

Exercice 17. Endomorphisme donné par l'image d'une base ATS 2010

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}f(e_1)&=&e_1+2e_2-e_3\\f(e_2)&=&2e_1+7e_2+3e_3\\f(e_3)&=&3e_2+5e_3\end{array}\right.$$

① Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

② Déterminer l'image et le noyau de f.

③ Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 18. Matrices symétriques et antisymétriques

On note $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA=A\}$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA=-A\}$.

Soit $p:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ A\mapsto\dfrac{1}{2}(A+{}^tA)$.

① Montrer que p est un endomorphisme.

② Montrer que $\mathrm{Im}(p)\subset\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, alors $p(A)=A$. En déduire $\mathrm{Im}(p)$.

③ Démontrer que $\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$.

④ Vérifier que $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

⑤ Déduire de ce qui précède : $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})=\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})\oplus\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$. Décomposer une matrice carrée A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Cette écriture est–elle unique ?

⑥ Conjecturer une base de chacun des deux espaces $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$.
Vérifier qu'il s'agit de familles libres et démontrer la conjecture par un argument de dimension. Préciser enfin $\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R}))$.

Bilan du § 11

Objectifs prioritaires

① savoir prouver qu'un sous ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel (1.3) ☐
- (a) dans le cas classique $\mathbb{K}^n$: exemples 8 et 9 ☐
- (b) dans les cas plus abstraits : exemples 11 et 12, exercice 2 ☐

② connaître la définition d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs (2.1) ☐
- (a) savoir refaire l'exercice 1 ☐

③ connaître la définition de l'intersection, de la somme de deux sous-espaces vectoriels (2.4) ☐

④ savoir démontrer qu'une application est (ou n'est pas) linéaire (1.2) ☐

⑤ connaître la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire (3.1) ☐
- (a) système d'équations et système générateur du noyau de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, F)$. (exemple 23) ☐
- (b) système d'équations et système générateur de l'image de $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$. (exemple 24) ☐
- (c) exercices 9 et 4 ($\mathbb{K}^n$) ☐

⑥ connaître la définition d'une famille libre de vecteurs (2.2) ☐

⑦ connaître la définition d'une base, de la dimension d'un espace vectoriel (4.3) ☐
- (a) savoir refaire les exemples 17 et 19 et l'exercice 7 ($\mathbb{K}^n$) ☐

⑧ connaître le lien entre dimension, famille libre, génératrice, et base (proposition 4) ☐

⑨ connaître la formule de Grassmann et le lien entre dimension et sev (proposition 10) ☐

⑩ savoir compléter une base d'un sev en une base d'un ev (théorème 6) ☐

⑪ connaître le théorème du rang (3.4) ☐

⑫ savoir passer d'un vecteur à ses coordonnées dans une base (section 4.1) ☐

⑬ savoir former la matrice d'une application linéaire et connaître ses propriétés (section 4.2) ☐
- (a) exemple 30 ☐
- (b) exercices 14, 12, 17 et 10 ☐

⑭ savoir travailler dans des bases différentes (section ??) ☐
- (a) bien comprendre l'exemple 32 ☐
- (b) exercices 14 et 17 ☐

Objectifs secondaires

① connaître la structure des solutions d'une équation linéaire (3.3) ☐

② savoir résoudre des exercices de synthèse plus abstraits ☐
- (a) exercice 8 sur les polynômes ☐
- (b) exercice 3 sur les fonctions ☐

③ matrices d'applications linéaires dans un cadre abstrait : exemples 31 ☐

Approfondissement

① connaître les huit propriétés d'un espace vectoriel (1.1) ☐

② savoir démontrer des propriétés abstraites : exercice 2 ☐