§ 1 : Langage mathématique

1. Introduction

1.1 Différents types d'énoncés mathématiques

La théorie des ensemble de Zeremlo–Fraenkel, qui sert de cadre à notre étude, est construite à partir de deux concepts primitifs, qui ne sont pas définis. Il s'agit de la notion d'*ensemble*, intuitivement une collection d'objet, et de la relation d'appartenance à un ensemble, que l'on note $\in$. La notation $x \in E$ signifie que x est un élément de l'ensemble E, ou encore que x appartient à E.

On se donne huit *axiomes* pour travailler avec ces ensembles. Ces axiomes, qui sont des règles intuitives de manipulation des ensembles, sont admis également, mais on démontre qu'ils ne contiennent pas de contradiction intrinsèque. Un exemple d'axiome est : « il existe au moins un ensemble ».

À partir de là, on est en mesure de donner des *définitions*, qui permettent de nommer certains objets mathématiques, ou certaines propriétés, afin de les utiliser plus facilement pour formuler certaines assertions : une *assertion* est une phrase mathématique qui peut-être vraie ou fausse.

Une assertion vraie est une *proposition*. Il y a plusieurs sortes de propositions : certaines, particulièrement importantes, méritent le nom de *théorèmes*. D'autres, qui ne sont que des étapes dans la démonstration de théorèmes sont appelées *lemmes*. On appelle enfin *corollaires* les conséquences simples de théorèmes plus importants.

Une *conjecture* est une assertion dont on pense qu'elle est vraie, mais qui n'a pas encore été démontrée. Une conjecture n'est donc pas encore une proposition.

Faire des mathématiques, c'est établir des conjectures dignes d'êtres prouvées (parce qu'elles sont utiles aux mathématiques ou aux autres disciplines, ou encore parce qu'elles sont élégantes) et les démontrer.

2. Quantificateurs

Une assertion mathématique dont les variables ne sont pas définies (par exemple « $x \geqslant 0$ ») n'a pas de sens : on ne peut évaluer sa valeur de vérité. Les quantificateurs ($\forall$, $\exists$) et la relation d'appartenance ($\in$) permettent d'introduire rigoureusement les variables utilisées :

2.1 Quantifier les variables

Définition 1. L'assertion « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est vraie si et seulement si l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour chaque élément x de l'ensemble E.

Le *quantificateur universel*, noté $\forall$, se lit « quelque soit » ou « pour tout ».

Définition 2. L'assertion « $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est vraie si et seulement si l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour au moins un élément x de l'ensemble E.

Le *quantificateur existentiel* est noté $\exists$. Les symboles « $\exists x \in E,$ » se lisent « il existe (au moins) un x dans l'ensemble E tel que ».

On note parfois « $\exists! x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » l'affirmation que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour un unique élément x de E.

Exemple 1. ✎ Vrai ou faux ? ① « $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$ » ② « $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \geqslant 0$ » ③ « $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$ »

Méthode 1. Prouver une propriété universelle

La démonstration d'une proposition universelle (une assertion vraie commençant par un quantificateur universel) débute par un quantificateur universel et doit être générale : un exemple ne suffit pas.
Ainsi, la réponse à une question : « Démontrer que pour tout x réel … » ou « Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, \dots$ » commencera souvent par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. » ou « $\forall x \in \mathbb{R}$ »…

Méthode 2. Prouver une propriété existentielle

Au contraire, pour démontrer une proposition existentielle, il suffit généralement d'exhiber un exemple.

2.2 Exemple de propriété universelle : l'égalité

MÉTHODE 3. Démontrer une égalité

Pour démontrer une égalité,

① on introduit toutes les variables intervenant avec « soit » (méthode 1),

② on part d'un membre de l'égalité (souvent le plus compliqué, permettant un développement ou une mise au même dénominateur),

③ après une succession d'égalités, on aboutit à l'autre,

④ on conclut par une phrase.

Si on échoue, on peut essayer de transformer séparément les deux membres pour aboutir au même résultat.

EXEMPLE 2. ✎ Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

2.3 Ordre et négation des quantificateurs, contre-exemples

REMARQUE 1 (ordre des quantificateurs). On peut intervertir deux quantificateurs identiques, mais :

⚠ on ne peut pas intervertir deux quantificateurs différents.

EXEMPLE 3. ✎ Écrire en français les assertions suivantes. Préciser, en justifiant, si elles sont vraies ou fausses.

① « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$ ». ② « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y$ ».

REMARQUE 2 (négation et quantificateurs). La négation de l'assertion « $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ » est « $\exists x,\ \operatorname{non}\mathcal{P}(x)$ ».

Plus généralement, lorsqu'on nie une assertion, on inverse l'ordre des quantificateurs.

En particulier, pour réfuter une assertion universelle, il suffit d'exhiber un contre-exemple (méthode 2).

EXEMPLE 4 (Fonction impaire). ✎ Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 + x - 2$ n'est pas impaire.

EXEMPLE 5 (Ensemble majoré). ✎ Un ensemble E de réels *majoré* vérifie : $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ y \geqslant x$.

Écrire avec des quantificateurs la définition d'un ensemble non majoré.

Vérifier que l'intervalle $[0\,;+\infty[$ n'est pas majoré.

3. Implication

3.1 Implication, contraposée et réciproque

DÉFINITION 3 (Implication). L'implication « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » est une assertion qui affirme que si l'assertion $\mathcal{P}$ est vraie, alors l'assertion $\mathcal{Q}$ est vraie aussi.

Lorsque $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour $\mathcal{Q}$, ou encore que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire à $\mathcal{P}$.

REMARQUE 3. ⚠ L'implication $\implies$ n'est pas synonyme de « donc » !

La phrase « $2x > 2 \implies x > 1$ », signifie que *sous l'hypothèse* $2x > 2$, *on peut conclure* $x > 1$ (mais on ne sait pas si $2x > 2$).

Au contraire, « $2x > 2$ donc $x > 1$ », signifie que l'*on sait* que $2x > 2$ et qu'on en déduit (en utilisant implicitement l'implication précédente), qu'effectivement $x > 1$.

REMARQUE 4 (Contraposée). Une implication « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » est vraie si et seulement si son implication *contraposée* « $\operatorname{non}(\mathcal{Q}) \implies \operatorname{non}(\mathcal{P})$ » est vraie.

Pour prouver une implication, on peut donc démontrer son implication contraposée.

EXEMPLE 6 (Fonction impaire). ✎ Démontrer que si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est impaire, alors $f(0) = 0$.

Qu'en déduire pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$?

Remarque 5 (Réciproque). ⚠ L'implication n'est pas commutative ! L'implication « $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ » est appelée l'*implication réciproque* de « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ ». Les valeurs de vérités d'une implication et de sa réciproque sont a priori indépendantes.

Exemple 7. La réciproque de « si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est impaire, alors $f(0) = 0$ » est–elle vraie ? Justifier.

3.2 Équivalence

> Définition 4 (Équivalence). L'équivalence « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ » se traduit par « $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$ », ou « $\mathcal{P}$ équivaut à $\mathcal{Q}$ », ou encore « $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante à $\mathcal{Q}$ ».
>
> On abrège parfois « si et seulement si » en « $\mathcal{P}$ ssi $\mathcal{Q}$ ».

Remarque 6. ⚠ ne pas confondre « $=$ » (relation d'égalité entre deux expressions) et « $\Leftrightarrow$ » (connecteur logique signifiant « si et seulement si », qui n'intervient pas dans la démonstration d'égalités).

En cas de confusion, ne plus utiliser « $\iff$ » mais « ssi » à la place.

Remarque 7 (Double implication). Pour démontrer l'équivalence « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ », on peut démontrer les deux implications : « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » et « $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ ».

Dans certains cas simples, on peut directement raisonner par une succession d'équivalences.

Exemple 8. ✎ Prouver que pour tout réel a, « $a = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon > |a|$ ».

3.3 Exemple d'utilisation des équivalences : la résolution d'une équation

Méthode 4. Résolutions

Pour résoudre une équation ou une inéquation, souvent :

- ⋆ on annonce ce que l'on fait (« on résout $2x + 4 = 0$ sur l'ensemble des réels »),
- ⋆ on obtient l'ensemble des solutions par équivalences (« $2x + 4 = 0$ ssi $2x = -4$ ssi $x = -2$ »),
- ⋆ on conclut par une phrase. (« l'ensemble des solutions est $\{-2\}$ »)

Si on interrompt le raisonnement par équivalences en utilisant des déductions (« donc »), il faut impérativement vérifier les solutions avant de conclure.
Pour les équations compliquées, se ramener au cas où un membre est nul et factoriser, puis utiliser la propriété du produit nul.

Remarque 8. Vérifier les solutions dans l'équation de départ est toujours une bonne idée !

Exemple 9. ✎ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x\mathrm{e}^x = 2x$.

Remarque 9. Dans le cas d'une inéquation, une méthode peut est de se ramener au cas où un membre est nul et de dresser une tableau de signes de l'autre membre, factorisé.

4. Vocabulaire

4.1 Ensembles

Les notions d'ensembles (intuitivement, une collection d'objet) et d'appartenance (« l'élément x appartient à l'ensemble E » s'abrège « $x \in E$ ») sont des notions primitives, que l'on ne définit pas.

Notation 1. On peut décrire un ensemble par

- ⋆ extension, en listant ses éléments entre accolades : $E = \{0; \mathrm{e}; -3\}$
- ⋆ compréhension, comme la partie d'un ensemble dotée d'une propriété : $S = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$

Notation 2. Des exemples d'ensembles classiques sont :

① l'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément.

② l'ensemble des nombres entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

③ l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

④ les intervalles de nombres entiers $[\![3\,;7]\!] = \{3; 4; 5; 6; 7\}$

⑤ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (quotients de nombres relatifs)

⑥ l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et les irrationnels comme $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}, \dots$

⑦ les intervalles : $]3\,;7] = \{x \in \mathbb{R},\ 3 < x \leqslant 7\},\ [3\,;+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R},\ 3 \leqslant x\}, \dots$

⑧ l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b,\ a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

⚠ on ne confondra pas $\{0; 1\}$ (ne contient que 0 et 1) et l'intervalle $[0\,;1]$ (contient tous les réels entre 0 et 1).

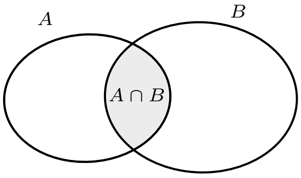
Définition 5. Soient A et B deux ensembles.

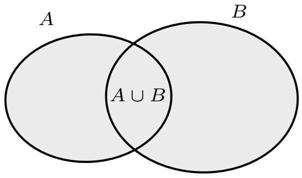
① Lorsque $x \in A \implies x \in B$, on dit que A est *inclus* dans B, ce que l'on note $A \subset B$.

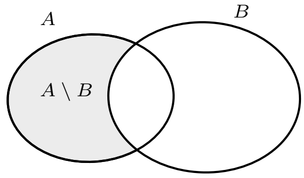
② L'intersection de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$.

③ La réunion de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$.

④ L'ensemble A privé de B est défini par $x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B)$.







Exemple 10. On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Si $\mathbb{K}$ est l'un de ces ensembles, on note $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}\setminus\{0\}$. De même, $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$, $\mathbb{R}_- = \,]-\infty\,;0]$, $\mathbb{R}_+^* = \,]0\,;+\infty[\dots$

Exemple 11. ✎ Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'*ensemble des parties* de E : l'ensemble des ensembles inclus dans E. Décrire $\mathcal{P}([\![1\,;3]\!])$.

Définition 6. Étant donnés deux ensembles A et B, le produit cartésien $A \times B$ de A est de B est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

On définit de même des produits cartésiens contenant davantage de facteurs.

On note aussi $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, ...

4.2 Applications

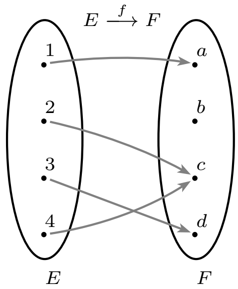
Définition 7. Définir (1) une *application* f (ou fonction (2)), c'est associer à tout élément x d'un ensemble E un unique élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F.

- ⋆ E est appelé l'*ensemble de définition* de f.
- ⋆ F est l'ensemble d'arrivée de f.
- ⋆ pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'*image* de x par l'application f.
- ⋆ pour tout $y \in F$, les solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x forment l'ensemble des antécédents de y par f. Cet ensemble peut-être vide, ou contenir un, plusieurs, voire une infinité d'éléments.

(1). la définition rigoureuse d'une application est la donnée d'un triplet d'ensembles (E, F, G) où $G \subset E \times F$ vérifie $\forall x \in E,\ \exists!(x; y) \in G$, et on pose alors $f(x) = y$.

(2). On ne fait pas de différence ici entre une application ou une fonction. Dans certains textes, une fonction associe *au plus* un élément de l'ensemble d'arrivée à tout élément de l'ensemble de départ. L'ensemble de définition peut alors être plus petit que l'ensemble de départ.

Exemple 12. On a schématisé ci-contre la définition d'une fonction f définie sur l'ensemble $E = [\![1\,;4]\!]$ et à valeurs dans $F = \{a; b; c; d\}$
L'image de 3 par f est d.
L'ensemble des antécédents de c par f est $\{2; 4\}$.
L'ensemble des antécédents de b par f est vide : $\varnothing$.



Exemple 13. Sur tout ensemble E non vide, on peut définir l'application *identité* par $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$.

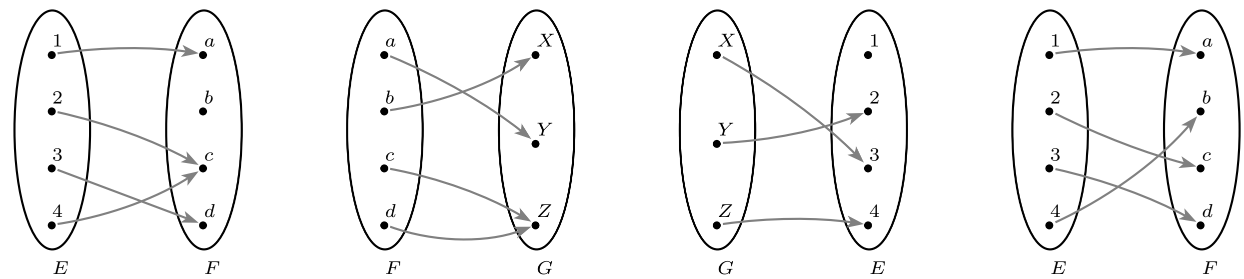
Remarque 10. On définira souvent une fonction par son expression :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

qui signifie que f est définie sur $E = \mathbb{R}$, à valeurs dans $F = \mathbb{R}_+$, et associe (flèche spéciale $\mapsto$) à tout x réel sont carré x^2.

Définition 8. Une application $f : E \to F$ est dite
- ⋆ *surjective*, ssi tout élément de F a *au moins* un antécédent : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
- ⋆ *injective*, ssi tout élément de F a *au plus* un antécédent : $\forall (x, z) \in E^2, f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$.
- ⋆ *bijective*, ssi tout élément de F a *exactement* un antécédent : f est surjective et injective.

f ni surjective, ni bijective — g surjective, non injective — h injective, non surjective — u bijective



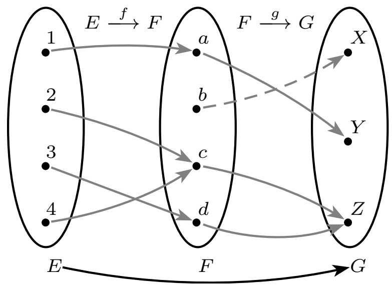
Remarque 11. on commence souvent l'étude par la surjectivité, la résolution de $y = f(x)$ dans la recherche d'antécédent permettant parfois de prouver l'unicité du même coup.

Exemple 14. ✎ les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
① $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$ ② $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x\,;\,y) \mapsto x + y$ ③ $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ④ $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$

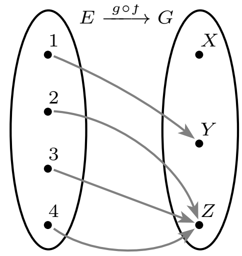
4.3 Composition

Définition 9. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La *composée* de g et f est l'application

$$g \circ f : E \to G,\ x \mapsto g\big(f(x)\big).$$



Exemple 15. Dans l'exemple ci-contre, $f(4) = c$ et $g(c) = Z$ donc $g \circ f(4) = g(f(4)) = g(c) = Z$.



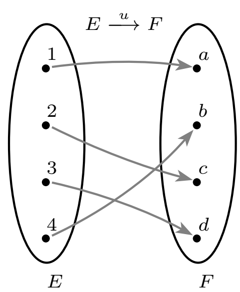
Exemple 16. ✎ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$. Donner une expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

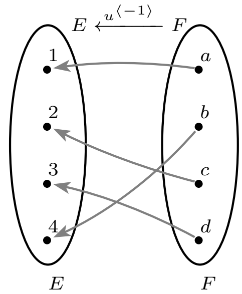
⚠ : la composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Définition 10. Dans le cas où $f : E \to F$ est une application bijective, pour tout $y \in F$, on note $f^{\langle -1\rangle}(y)$ l'unique antécédent de y par f. L'*application réciproque* de f est l'application

$$f^{\langle -1\rangle} : F \to E,\ y \mapsto f^{\langle -1\rangle}(y)$$

Par définition, $f^{\langle -1\rangle} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{\langle -1\rangle} = \mathrm{Id}_F$.





Exemple 17. ✎ Expliciter les applications réciproques des bijections de l'exemple 14.

5. Notions de dénombrement

5.1 Nombres entiers et raisonnement par récurrence

L'existence de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni des opérations et de la relation d'ordre usuelles, et satisfaisant la proposition suivante est une conséquence de l'un des axiomes de la théorie de Zeremlo–Fraenkel, appelé axiome de l'infini.

Proposition 1. Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n, qui peut être vraie ou fausse. Si
- ⋆ (initialisation) $\mathcal{P}(n_0)$ est vrai pour un entier n_0,
- ⋆ (transmission) $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant n_0$,

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Intuitivement, à partir de $\mathcal{P}(n_0)$ vrai, que l'on démontre à l'étape d'initialisation, et en appliquant en cascade les implications $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ démontrées dans la transmission, on peut prouver $\mathcal{P}(n)$ pour n aussi grand que voulu.

Par exemple : imaginons avoir démontré $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \geqslant 0$.

On a $\mathcal{P}(0) \xRightarrow{\text{transmission}, n=0} \mathcal{P}(1)$, or $\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation), donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On a $\mathcal{P}(1) \xRightarrow{\text{transmission}, n=1} \mathcal{P}(2)$, or $\mathcal{P}(1)$ est vraie (étape précédente), donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

On a $\mathcal{P}(2) \xRightarrow{\text{transmission}, n=2} \mathcal{P}(3)$, or $\mathcal{P}(2)$ est vraie (étape précédente), donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie...

Méthode 5. Rédiger une récurrence

En pratique :

① on énonce clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ à prouver.

② initialisation : on démontre l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$

③ transmission : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour *un* entier $n \geqslant n_0$, et on déduit de cette hypothèse la propriété au rang $n+1$: $\mathcal{P}(n+1)$.

④ conclusion : on affirme que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 18. ♡ On connaît la proposition (*) « pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$ » et on veut prouver : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

⋆ Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété « $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ ».

⋆ Initialisation : $(\mathrm{e}^x)^1 = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^{1\times x} = \mathrm{e}^x$ donc la propriété est vrai au rang 1.

⋆ Transmission : on fait l'hypothèse que la propriété « $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ » est vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé.

On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$: « $(\mathrm{e}^x)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)x}$ ».

$(\mathrm{e}^x)^{n+1} \overset{(*)}{=\!=} (e^x)^n \times e^x \overset{\text{Hyp}}{=\!=} \mathrm{e}^{nx}\mathrm{e}^x \overset{(*)}{=\!=} \mathrm{e}^{nx+x} = \mathrm{e}^{(n+1)x}$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

⋆ Conclusion : par récurrence, « $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ » pour tout entier $n \geqslant 1$.

d'où finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$. □

Remarque 12. Ce raisonnement est souvent source d'erreurs :

- ⋆ ⚠ avant de l'utiliser, vérifier qu'il n'existe pas de démonstration directe.
- ⋆ ⚠ si, au cours de la transmission, on prouve la propriété au rang $n+1$ sans utiliser l'hypothèse de récurrence, cela signifie que l'on peut prouver directement le résultat.
  Dans ce cas, on n'utilise pas le raisonnement par récurrence, mais une preuve directe.
- ⋆ ⚠ si la propriété à démontrer ne dépend pas d'un entier, mais par exemple d'un nombre réel, la démonstration par récurrence est impossible !
- ⋆ ⚠ si, dans la transmission, on suppose la propriété vraie pour « *tout* n » au lieu de « un n », la démonstration n'a plus de valeur, car on a supposé vrai le résultat que l'on voulait prouver !

Exemple 19. ✎ Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité : « $2^n > n$ ».
Suffit-il d'initialiser pour $n = 0$ afin de démontrer $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$?

5.2 Sommes et produits

Notation 3. Soient les nombres $a_0, ..., a_n$. On pose (3) :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$$

Remarque 13 (Variables muettes). Dans la notation 3, la lettre « k » est l'*indice* de la somme. Elle est *muette*, on peut la remplacer par n'importe quel symbole (non utilisé auparavant).

Les variables dites *muettes*, qui font partie d'une notation, et que l'on peut choisir arbitrairement, ne doivent pas être introduites par des quantificateurs. En voici d'autres exemples :

le n de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ne^{-n}$; le t de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; le x de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^2+1)$ …

Exemple 20. ♡ ✎

① Écrire avec des pointillés les sommes : $A = \displaystyle\sum_{k=2}^{50} k^2$, $\quad B = \displaystyle\sum_{p=1}^{2014} \mathrm{e}^{\sqrt{p}}$

② Écrire avec Σ : $C = \ln(2)+\ln(3)+\cdots+\ln(42)$, $D = 2+4+6+\ldots 50$, $E = \dfrac{1}{1+2} + \dfrac{2}{2+3} + \ldots \dfrac{3\,000}{3\,000+3\,001}$

③ Donner le nombre de termes de chacune des sommes A, B, C, D et E.

④ Calculer le produit $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} \frac{i+1}{i+2}$

⑤ Écrire les sommes suivantes, de sorte que le premier indice soit 0 : $\displaystyle\sum_{i=2}^{10} \sin(i)$ et $\displaystyle\sum_{n=-5}^{30} \frac{n-2}{n+7}$

On peut montrer par récurrence les propriétés suivantes :

Proposition 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0\,;n]\!]$, et $a_0, \ldots a_n, b_0, \ldots, b_n$ des nombres. Alors :

① associativité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$, en particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

② linéarité : $\displaystyle\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$.

Proposition 3. Sommes de référence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ① $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ② pour $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

(3). rigoureusement, le symbole Σ est défini par récurrence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} a_k = a_{p+1} + \sum_{k=0}^{p} a_k$.

Démonstration. ✎ ① : récurrence, ② : calculer $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$. □

5.3 Factorielle et combinaisons

Définition 11. Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre *factorielle* n est $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Par convention, on pose aussi $0! = 1$.

Exemple 21. Calculer $n!$ pour $n \in [\![0\,;6]\!]$. Simplifier $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 12. Pour tous entiers naturels n et p, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, qui représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n, par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 1} \text{ si } n \geqslant p \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

On utilise parfois la notation $C_n^p = \dbinom{n}{p}$.

Exemple 22. ✎ soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\dbinom{n}{0}, \dbinom{n}{1}, \dbinom{n}{n}$. Soit $p \in [\![0\,;n]\!]$, montrer que $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$.

Proposition 4. Triangle de Pascal

Soient deux entiers naturels $p < n$. Alors : $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$.

Démonstration. ✎ Partir du membre de droite et réduire au même dénominateur. □

Exemple 23. ✎ Coefficients binomiaux pour $0 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$:

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	**2**	**1**				
3	1	3	**3**	1			
4							
5							
6							

on utilise la proposition 4 :

$$\begin{array}{ccc} \dbinom{n}{p} & + & \dbinom{n}{p+1} \\ & & \| \\ & & \dbinom{n+1}{p+1} \end{array}$$

Exemple 24. ✎ Montrer par récurrence qu'il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p objets parmi n.

Proposition 5. Binôme de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

Démonstration. ✎ Procéder par récurrence sur n. □

Exemple 25. Soit x réel, développer : $(1+x)^4$. Calculer, pour tout entier naturel n, $\sum_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p}$.

Bilan du § 1

Le but de ce chapitre est double : donner de bon réflexes de rédaction des textes mathématiques, et comprendre des concepts liés au calcul avec les entiers : la notion de récurrence (priorité absolue), les sommes, et les coefficients binomiaux.

Les sections 2 (symboles $\in$, $\forall$, $\exists$, méthode pour démontrer une égalité), 3 (symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$, méthode pour résoudre une équation), et 4.1 (vocabulaire des ensembles) contiennent peu de choses à apprendre, mais des méthodes à acquérir, qui serviront de référence durant toute l'année.

La section 4.2 et 4.3 introduisent les notions de bijection, surjection, injection d'une part et fonction réciproque d'autre part. Ce sont des concepts difficiles sur lesquels nous reviendront plusieurs fois pendant l'année.

La section 5.1, sur la notion de récurrence, est la plus importante du chapitre. Il faut la travailler avec les exercices qui s'y rapportent.

La section 5.2 sur les symboles Σ et Π sera utilisée toute l'année également. Les résultat de la 3 sont à connaître absolument.

Enfin, les définition et résultats de la section 5.3, qui présentent les coefficient binomiaux et la formule du binôme, constituent la seconde priorité du chapitre.

Objectifs prioritaires

① Savoir formuler un raisonnement par récurrence (section 5.1) .... ☐
  (a) savoir refaire l'exemple 18 .... ☐
  (b) savoir refaire l'exemple 19 .... ☐
  (c) savoir refaire l'exercice 4 .... ☐

② savoir utiliser les factorielles et les coefficients binomiaux (section 5.3) .... ☐
  (a) savoir par cœur la définition 11 de factorielle .... ☐
  (b) savoir refaire l'exemple 21 .... ☐
  (c) savoir par cœur la définition 12 de coefficient binomial .... ☐
  (d) savoir refaire et connaître les résultats de l'exemple 22 .... ☐
  (e) savoir par cœur la proposition 4 .... ☐
  (f) savoir refaire l'exemple 23 .... ☐
  (g) savoir par cœur la proposition 5 .... ☐
  (h) savoir refaire l'exemple 25 .... ☐
  (i) savoir refaire l'exercice 9 .... ☐

③ maîtriser la rédaction de raisonnements élémentaires .... ☐
  (a) savoir rédiger une égalité : méthode 3 .... ☐
  (b) savoir rédiger la résolution d'une équation : méthode 4 .... ☐

④ savoir utiliser les symboles Σ et Π (section 5.2) .... ☐
  (a) savoir par cœur les sommes de référence de la proposition 3 .... ☐
  (b) savoir refaire l'exemple 20 .... ☐
  (c) savoir refaire l'exercice 6 .... ☐
  (d) savoir refaire l'exercice 7 .... ☐
  (e) savoir refaire l'exercice 8 .... ☐

Objectifs secondaires

① utiliser systématiquement les quantificateurs (section 2) .... ☐
  (a) savoir refaire l'exercice 1 .... ☐

② connaître les notions d'injection, surjection et bijection (définition 8) .... ☐
  (a) savoir refaire l'exemple 14 .... ☐

TD § 1

Logique

Exercice 1. Vrai – faux, avec quantificateurs
Vrai ou Faux ? Justifier !
① $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ y \leqslant x$ ② $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ ③ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant -5$ ④ $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} \neq x$
⑤ $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \ln(\mathrm{e}^x)$ ⑥ $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ 3x+5<0$ ⑦ $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2-4 = \sqrt{(x^2-4)^2}$ ⑧ $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} = -x$.

Exercice 2. Implications
Écrire l'implication donnée et sa réciproque avec le symbole $\Longrightarrow$.

Dire ensuite, en justifiant, lesquelles de ces deux propositions sont vraies.

① Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs.

② $2x+3>0$ seulement si $x>0$.

③ Pour que $x=2$, il faut que $x^2=4$.

Exercice 3. Injectivité et stricte monotonie
Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Démontrer que si f est strictement monotone, alors f est injective. Que dire de la réciproque ?

Récurrences

Exercice 4. Récurrences
Démontrer par récurrence :

① $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ où $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [-1;+\infty[$. (inégalité de Bernoulli)

② pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

③ pour tout entier naturel n, n^3-n est divisible par 3.

④ pour tout entier naturel n, 7^n-1 est divisible par 6.

⑤ $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$ (où $n \in \mathbb{N}$)

⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Composées successives
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note : $f^{\langle n\rangle} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composée successive de n fonctions f).

Donner $f^{\langle 2\rangle}$ et $f^{\langle 3\rangle}$. Conjecturer une expression de $f^{\langle n\rangle}$, et prouver la conjecture.

Sommes et produits

Exercice 6. Sommes de référence
Simplifier : ① $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1$ où $n \in \mathbb{N}^*$. ② $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$ où $n \in \mathbb{N}^*$ ③ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k$ où $n \in \mathbb{N}$ ④ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 3^{n+k}$ où $n \in \mathbb{N}$.
⑤ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2)$ où $n \in \mathbb{N}$ ⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{3k+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. ⑦ $\displaystyle\sum_{k=8}^{21} \frac{2k-5}{6}$.

Exercice 7. Sommes télescopiques
Simplifier : ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 8. Produits

Simplifier : ① $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ où $n \in \mathbb{N}$. ② $\prod_{k=1}^{n} \ln(k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ③ $\prod_{k=1}^{n} 2k$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 9. Sommes binomiales

Simplifier :

① $\sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{3^j}$ où $n \in \mathbb{N}$. ② $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$ ③ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ ④ $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Défis

Exercice 10. Somme binomiale

Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 11. Somme des carrés des coefficients binomiaux (guidé) ⋆⋆

Soit n un entier naturel.

Déterminer de deux façons différentes le coefficient de x^n dans le développement du polynôme $(1+x)^n(1+x)^n$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Corrigés

Exercice 4. Récurrences

⑤ Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$.

⋆ initialisation : $\sum_{p=0}^{0} 2p+1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$.

On va démontrer la propriété au rang $n+1$: $\sum_{p=0}^{n+1} 2p+1 = (n+2)^2$

$$\sum_{p=0}^{n+1} 2p+1 = 2(n+1)+1+\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = 2n+3+(n+1)^2 = 2n+3+n^2+2n+1 = n^2+2\cdot 2n+2^2 = (n+2)^2$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

⋆ conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$

Exercice 6. Sommes de référence

⑥ Cette somme est liée aux sommes géométriques : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue le changement d'indice $j = k-1$ (soit $k = j+1$) :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{3k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{3(j+1)+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{3j+4} = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathrm{e}^3)^j \mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^4 \sum_{j=0}^{n-1} (\mathrm{e}^3)^j = \mathrm{e}^4 \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{3n}}{1-\mathrm{e}} = \mathrm{e}^4 \cdot \frac{\mathrm{e}^{3n}-1}{\mathrm{e}-1}.$$

donc $S = \mathrm{e}^4 \cdot \frac{\mathrm{e}^{3n}-1}{\mathrm{e}-1}$.