DM 9 : pour le 03-03-14

Exercice 1. Courbe, points stationnaires, géométrie ⋆⋆

Soit l'application définie par $\vec{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{array} \right.$

Pour tout réel t, $M(t)$ désigne le point du plan de coordonnées $(x(t)\,;y(t))$

On note $\Gamma_0 = \{M(t) : 0 \leqslant t \leqslant \pi\}$ la partie de la courbe de $\vec{g}$ obtenue pour $t \in [0\,;\pi]$ et $\Gamma = \{M(t) : t \in \mathbb{R}\}$ l'intégralité de cette courbe.

① Étudier la périodicité et la parité des fonctions x et y.
Démontrer que l'on peut obtenir Γ à partir de Γ_0 par une transformation que l'on précisera.

② Donner, en justifiant les signes, le tableau de variations conjointes de x et y sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

③ Pour quelles valeurs du paramètre t le point $M(t)$ est-il stationnaire ?
Calculer $\lim\limits_{t\to\pi} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

④ Représenter soigneusement Γ_0 et le reste de Γ en deux couleurs différentes.

⑤ Pour tout réel t, on note simplement $M = M(t)$ et $N = M(\pi + t)$.
Vérifier que pour tout réel t, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux.

⑥ Déterminer, pour tout réel t, les coordonnées $(X(t)\,;Y(t))$ du milieu de $[MN]$.

⑦ Simplifier l'expression $\left(X(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2$.
En déduire une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{C}$ des milieux de $[MN]$.
Préciser la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$.

⑧ Ajouter à la figure les points M, N, les droites (OM), (ON) pour $t = \frac{\pi}{3}$, puis $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Équation différentielle, racines de l'unité et éléments simples ⋆⋆

On cherche à résoudre, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, l'équation différentielle : $(E)\ :\ (1-x^6)y' + 6x^5y = 1 - x^6$.

① Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée à (E).

② Mettre le polynôme $X^6 - 1$ sous la forme d'un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

③ En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^6-1}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

④ Pour tout réel $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, déterminer $\displaystyle\int \frac{x-\cos(\alpha)}{x^2 - 2\cos(\alpha)x + 1}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2\cos(\alpha)x+1}\mathrm{d}x$

⑤ À l'aide des résultats précédents et de la méthode de la variation de la constante : résoudre (E).