Contrôle 9 : 10-04-2014

Exercice 1.

Soient deux nombres réels strictement positifs a et b, ainsi que les matrices :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

① Soit $\mathcal{E} = \{\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et donner sa dimension en justifiant la réponse.

② Montrer que la matrice $\mathbf{K}$ admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ que l'on calculera.

③ La matrice $\mathbf{K}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

④ (a) Déterminer le sous-espace vectoriel propre $\mathcal{U}_1$ associé à la valeur propre λ_1. Donner u_1 le vecteur propre de $\mathcal{U}_1$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.

(b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre $\mathcal{U}_2$ associé à la valeur propre λ_2. Donner u_2 le vecteur propre de $\mathcal{U}_2$ dont la deuxième composante vaut 1.

(c) Déterminer le sous-espace vectoriel propre $\mathcal{U}_3$ associé à la valeur propre λ_3. Donner u_3 le vecteur propre de $\mathcal{U}_3$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.

⑤ Montrer qu'il existe une matrice $\mathbf{P}$ inversible et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{K} = \mathbf{PDP}^{-1}$.
Donner $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$.

⑥ Pour tout i valant 1 ou 2 ou 3, montre que les vecteurs propres u_i de $\mathbf{K}$, associés aux valeurs propres λ_i, sont aussi vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$, associés aux valeurs propres μ_i.
Exprimer μ_i en fonction de α, β et λ_i.

⑦ (a) Montrer que toute matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$ est diagonalisable et donner une matrice diagonale Δ semblable à $\mathbf{M}$.

(b) Montrer que $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$ avec le même $\mathbf{P}$ qu'à la question ⑤.

⑧ On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Utiliser ce qui précède pour déterminer une matrice Δ et une matrice $\mathbf{Q}$ inversible telles que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^{-1}$.

⑨ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de la puissance n-ième $\mathbf{A}^n$ de $\mathbf{A}$.

Exercice 2.

Partie A.

Soit n un entier naturel non nul.

① Exprimer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}$ à l'aide d'une puissance de -1.

② On pose pour tout entier naturel p, $I_{p,n} = \displaystyle\int_0^\pi t^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_{0,n} = \dfrac{-\big((-1)^n - 1\big)\mathrm{i}}{n}$.

③ Montrer que $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $I_{p,n} = \dfrac{\mathrm{i}(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \dfrac{\mathrm{i}p}{n} I_{p-1,n}$.

④ Soient quatre nouvelles intégrales définies respectivement par :
$C_{1,n} = \displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t$, $S_{1,n} = \displaystyle\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t$, $C_{2,n} = \displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(nt)\mathrm{d}t$, $S_{2,n} = \displaystyle\int_0^\pi t^2\sin(nt)\mathrm{d}t$

(a) Calculer $I_{1,n} = \displaystyle\int_0^\pi t^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_{1,n} = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2}$ et $S_{1,n} = \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$.

(b) Calculer $I_{2,n} = \displaystyle\int_0^\pi t^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{2,n} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \text{ et } S_{2,n} = \frac{2}{n^3}\big((-1)^n - 1\big) - \frac{(-1)^n\pi^2}{n}.$$

Partie B.

Soit une fonction f **impaire**, continue et 2π–périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0\,;\pi[$ par : $f(t) = \pi t - t^2$.

① Représenter f sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

② Déterminer la série de Fourier de f.
Préciser la valeur des termes d'indice pair et des termes d'indice impair.

③ Étudier la convergence de la série de Fourier et donner sa somme.

④ (a) Énoncer la relation de Parseval.

(b) Appliquer la relation de Parseval à la fonction f et en déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

(c) Soit $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Trouver une expression de T de la forme $T = S + bT$. En déduire la valeur de T.

Exercice 3.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ on considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique :

$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$ avec $t \in]-\pi\,;\pi]$. On note $M(t)$ le point de $\mathcal{C}$ associé au paramètre t.

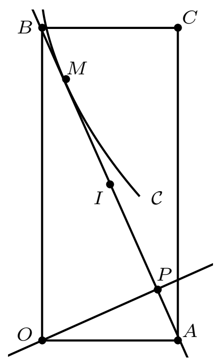
① Soit $M(t)$ un point de $\mathcal{C}$. Préciser par quelle transformation géométrique on obtient à partir de $M(t)$ les trois points suivants : (a) $M(-t)$; (b) $M(\pi - t)$; (c) $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.
En déduire l'intervalle le plus petit possible $I = [0\,;\alpha]$ tel que si $\mathcal{C}_0$ est la restriction de $\mathcal{C}$ obtenue pour $t \in I$, on peut obtenir tout $\mathcal{C}$ par des transformations géométriques successives (dont on précisera l'ordre) appliquées à $\mathcal{C}_0$.

② Faire un tableau de variation conjoint de $\big(x(t), y(t)\big)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$. En déduire la représentation graphique de $\mathcal{C}_0$, puis de $\mathcal{C}$ que l'on donnera sur la copie.

③ Montrer que le vecteur $\vec{u}$ de composantes $(-\cos(t), \sin(t))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t)$. Donner les composantes d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$.
En déduire qu'une équation de la tangente T au point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}$ est $X\sin(t) + Y\cos(t) = \sin(t)\cos(t)$.

④ Pour tout $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donner les coordonnées du point d'intersection $A(t)$ de T avec l'axe $(x'x)$ et du point d'intersection $B(t)$ de T avec l'axe $(y'y)$. [On posera $A(0) = (1,0)$, $B(0) = (0,0)$, $A(\pi/2) = (0,0)$, $B(\pi/2) = (0,1)$]. Que peut-on dire de la distance $\mathbf{AB}$?

⑤ Pour tout $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, avec $A = A(t)$, $B = B(t)$, soit $C = C(t)$ tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. [(O, A, C, B) rectangle].
Montrer que la projection orthogonale de C sur (AB) est $M(t)$.



⑥ Montrer que la projection orthogonale de l'origine O sur (AB) est $P = P(t) = \big(\cos(t)\sin^2(t), \cos^2(t)\sin(t)\big)$; et que le milieu I de $[M, P]$ est le centre du rectangle (O, A, C, B).

⑦ On se propose de représenter graphiquement la courbe $\mathcal{Q}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} X(t) = \cos(t)\sin^2(t) \\ Y(t) = \cos^2(t)\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Donner les coordonnées de $P(0)$, $P(\frac{\pi}{4})$, $P(\frac{\pi}{2})$ ainsi que la direction des vecteurs tangents à $\mathcal{Q}$ en ces points.

⑧ Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, montrer que l'angle $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}}(t)$ a pour mesure $\theta = \frac{\pi}{2} - t$.

⑨ Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, calculer la longueur $OP(t)$ en fonction de θ.
En déduire l'équation de la restriction $\mathcal{Q}_0$ de $\mathcal{Q}$ à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ en coordonnées polaires.

⑩ En déduire la représentation graphique de $\mathcal{Q}_0$, que l'on donnera sur la copie. On représentera $\mathcal{Q}$ en utilisant en les justifiant les mêmes transformations géométriques qu'à la question ①.