Contrôle 8 : 12-03-2014

3 heures, calculatrice et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. Avant de chercher la réponse à une question, vérifier qu'elle ne découle pas des questions précédentes.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Exercice 1.

Partie A

Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$, on considère l'endomorphisme f de matrice $\mathbf{A}$ dans la base $\mathcal{B}$ et une matrice $\mathbf{S}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (i', j', k')$, les composantes de i', j', et k' dans la base $\mathcal{B}$ étant données respectivement par la première, la deuxième et la troisième colonne de la matrice $\mathbf{S}$.

① Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale de $\mathcal{E}$ (une base dont les vecteurs sont deux à deux orthogonaux).

② Montrer que $\mathbf{S}^2 = 9\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ étant la matrice identité de $\mathcal{E}$. En déduire l'inverse de $\mathbf{S}$.

③ Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, puis celle de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$

④ Exprimer $f(i')$, $f(j')$ et $f(k')$ dans la base $\mathcal{B}'$. Donner la matrice $\mathbf{D}'$ de f dans $\mathcal{B}'$.
En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telle que $\star$: $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}$.
Sans calcul explicite de produit matriciel, vérifier que $\mathbf{A}^2 = 81\mathbf{I}$.

Partie B

On considère trois fonctions (x, y, z) dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système différentiel :

$$(SD)\begin{cases} x'(t) &= 7x(t) - 4y(t) - 4z(t) \\ y'(t) &= -4x(t) + y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= -4x(t) - 8y(t) + z(t) \end{cases} \text{ avec la condition initiale } (CI) : (x(0), y(0), z(0)) = (9, 0, 9)$$

① Montrer que le système (SD) peut s'écrire $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{AX}(t)$ en précisant ce qu'est $\mathbf{X}(t)$.

② Soit la matrice colonne $\mathbf{U}(t) = \mathbf{SX}(t)$, avec $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.
Montrer que u, v, w vérifient un système différentiel simple (calculer $\mathbf{U}'(t)$ et utiliser l'équation $\star$ de A).
Préciser la condition initiale $\mathbf{U}(0)$.

③ Calculer $\mathbf{U}(t)$. Si dans le repère orthonormé (O, i', j', k'), $\mathbf{m}_t$ est le point de coordonnées $(u(t), v(t), w(t))$, déterminer un vecteur constant $\mathbf{n} \in \mathcal{E}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{\mathbf{Om}_t}$.

④ Déduire de ce qui précède l'unique fonction $\mathbf{X}(t)$ vérifiant (SD) et (CI).
Si, dans le repère (O, i, j, k), $\mathbf{M}_t$ est le point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$, déterminer un vecteur constant $\mathbf{N} \in \mathcal{E}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{N} \perp \overrightarrow{\mathbf{OM}_t}$.

⑤ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $\mathbf{M}_t$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ décrit la courbe $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est incluse dans un plan dont on donnera une équation cartésienne.

⑥ Représenter graphiquement dans le repère (O, i', j') la courbe de représentation paramétrique $(u(t), v(t))$. Quelle est la nature de cette courbe ? Quel est son rapport avec la courbe $\mathcal{H}$?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)}$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

① Soit (x_n) une suite de réels positifs. Montrer que si la série $\sum x_n$ converge, alors la série $\sum x_n^2$ converge aussi. On pourra par exemple justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ x_n^2 \leqslant x_n$.

② Étudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.

③ À partir du développement limité de la fonction exponentielle, démontrer la formule du développement limité à l'ordre 2 en 0 de ch.

④ (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive, puis qu'elle est strictement décroissante.
(b) En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

⑤ On pose, pour tout $n \geqslant 0,\ v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
(a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative. Montrer que (v_n) converge vers 0.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série $\sum v_k$ est divergente.

⑥ (a) Montrer que $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.
(b) En déduire que la série $\sum u_n^2$ est divergente. Conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Partie A. Soit l'intégrale de Gauss $G = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$, soit $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u)\mathrm{d}u$.

① Établir la convergence de A. En posant $x = t\sqrt{2}$, montrer que $G = 2\sqrt{2}A$.

② Démontrer : $\forall x > -1,\ \ln(1 + x) \leqslant x$.
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$

③ Démontrer que $w_{2n+1}\sqrt{n} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant w_{2n-2}\sqrt{n}$. On pourra, dans l'inégalité précédente, poser $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans la première intégrale, et $t = \sqrt{n}\dfrac{\cos u}{\sin u}$ dans la dernière.

④ En admettant que $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (intégrale de Wallis), déduire de la question précédente A puis G.

Partie B. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ \varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ, avec $\varphi^{(0)} = \varphi$.

① Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe une suite de fonctions polynômes P_n, telles que pour tout réel x, on ait : $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x)\varphi(x)$. Calculer P_0, P_1 et P_2.

② Montrer la relation $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x)$. En déduire, par récurrence sur n, que P_n est un polynôme de degré n, de même parité que n, et de coefficient dominant $a_n = 1$.

③ Calculer $P_3(x)$ et $P_4(x)$.

④ Montrer que $P_4(x)$ admet quatre racines réelles, calculer chacune de ses racines.

⑤ On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^n\varphi^{(n)}(x) = -\varphi_{n-1}'(x)$ avec $\varphi_0(x) = \varphi$.
(a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \varphi_n(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = 0$.
En déduire que pour tout $n > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0$.
(b) Soient deux entiers k et n avec $0 < k \leqslant n$. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\mathrm{d}x = k\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1}\varphi_{n-1}(x)\mathrm{d}x$.
(c) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\mathrm{d}x = k!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x)\mathrm{d}x$.
En déduire que si $k < n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0$, et si $k = n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\mathrm{d}x = Gn!$ où G à été calculée dans la partie A.
(d) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)P_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 0$ si $m < n$ et $\sqrt{2\pi}\,n!$ si $m = n$.