Contrôle 7 : 28-01-2014

3 heures, calculatrice et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. Avant de chercher la réponse à une question, vérifier qu'elle ne découle pas des questions précédentes.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Exercice 1.

On considère l'ensemble des matrices à coefficients complexes $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient α et β deux réels non nuls. On note f_1 et f_2 les fonctions numériques réelles définies par :

$$f_1(x) = \cos(\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x} \text{ et } f_2(x) = \sin(\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonction : $\mathcal{F} = \{f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{F}$ qui à f associe f', la fonction dérivée de f.

① Calculer $\mathbf{J}^2$

② On considère des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $\mathbf{M} = a\,\mathbf{I} + b\,\mathbf{J}$ où a et b sont des nombres complexes. Calculer $\mathbf{M}^2$ et $\mathbf{M}^3$.

③ Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathcal{F}$. Donner la dimension de $\mathcal{F}$.

④ Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

⑤ Donner la matrice $\mathbf{M}$ de φ dans la base $\mathcal{B}$.

⑥ Donner un triplet (r, s, t) de $\mathbb{R}^3$ tel que $r\mathbf{M}^2 + s\mathbf{M} + t\mathbf{I} = \mathbf{O}$ où $\mathbf{O}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. [Indication : on peut remarquer que $\mathbf{M} - \alpha\mathbf{I} = \beta\mathbf{J}$ et utiliser le résultat de ①]

⑦ L'application φ est-elle bijective ? Si oui, donner $\mathbf{M}^{-1}$.

⑧ Montrer que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ vérifient une équation différentielle liénaire du second ordre que l'on donnera.

⑨ Donner dans $\mathcal{F}$ l'unique primitive F de la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

⑩ En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos(3x)\mathrm{e}^{4x} - 3\sin(3x)\mathrm{e}^{4x})\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2.

Soit le polynôme $P(X) = X^5 - 2X^4 + 5X^3 - 8X^2 + 4X$ et la fraction rationnelle $f(X) = \dfrac{4X+1}{P(X)}$

① Donner une racine évidente de P, autre que 1.

② Quelle est la multiplicité de la racine 1 dans P ?

③ Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

④ Calculer la décomposition en éléments simples de f dans $\mathbb{R}(X)$.

⑤ Donner une primitive des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$

⑥ Calculer $\displaystyle\int_2^3 f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 3.

Soit, pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

① Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{1}{k+n+1} \leqslant \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \dfrac{1}{k+n}$.
[Indication : accroissements finis]

② En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.

③ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On ne cherchera pas à calculer explicitement cette intégrale.

① *Signe et variations de F :*

(a) Montrer que pour tout $x > 0,\ F(x) \geqslant 0$. [indication : on peut distinguer les cas où $x \geqslant 1$ et $x \leqslant 1$]

(b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$ et donner le tableau de variations de F (sans les limites).

② Montrer que : $\forall x > 0,\ F(\frac{1}{x}) = F(x)$ au moyen d'un changement de variable.

③ *Étude asymptotique de F*. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

(a) Vérifier que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la fonction ainsi prolongée.

(b) Montrer que $\forall x > 0,\ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

(c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On note encore F la fonction ainsi obtenue. Que dire de F au voisinage de $+\infty$. [indication : ②]

(d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0.

④ *Valeur approchée de $F(0)$*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln t\,\mathrm{d}t$.

(b) Rappeler l'expression explicite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

En déduire : $\forall x \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

(c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0\,;1[$, une majoration de $\left|F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right|$.

(d) On pose pour $n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Montrer que $|F(0) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$

(e) Expliquer comment obtenir une approximation à 10^{-2} près de $F(0)$.

Exercice 5.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de dimension 2 à coefficients complexes.

On dit qu'une matrice $\mathbf{K}$ est une *matrice scalaire* s'il existe un nombre complexe k tel que :

$$\mathbf{K} = k\mathbf{I}_n \text{ où } \mathbf{I}_n \text{ est la matrice identité de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On dit qu'une matrice $\mathbf{A}$ a la *propriété de Dirac* si $\mathbf{A}^2$ est une matrice scalaire.

On note $\mathrm{tr}(\mathbf{M})$ la trace de la matrice $\mathbf{M}$, c'est-à-dire la somme $a + d$ de ses éléments diagonaux.

On note $\det(\mathbf{M})$ le déterminant $ad - bc$ de la matrice $\mathbf{M}$.

① Montrer que, $\forall \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \mathbf{M}^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\mathbf{M} + \det(\mathbf{M})\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}$.

② Montrer que si la matrice $\mathbf{A}$ a sa trace nulle, alors la matrice $\mathbf{A}$ possède la propriété de Dirac.

③ Montrer qu'une matrice $\mathbf{A}$ qui a la propriété de Dirac est une matrice dont la trace est nulle ou une matrice scalaire.

④ Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle, ensemble noté $\mathcal{D}_2$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Donner la dimension de $\mathcal{D}_2$.

⑤ Soient les matrices $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $(\mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{L})$ est une base de $\mathcal{D}_2$.

(b) Soit $\mathbf{A} = x\mathbf{J} + y\mathbf{K} + z\mathbf{L}$. Calculer $\mathbf{A}^2$ en fonction de x, y, z et $\mathbf{I}_2$.

⑥ Montrer que si $\mathbf{A}$ a la propriété de Dirac et $\mathbf{A}^2 \neq 0$ alors $\mathbf{A}$ est inversible et $\mathbf{A}^{-1}$ a la propriété de Dirac.