Contrôle 6

3 heures, calculatrice et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. Avant de chercher la réponse à une question, vérifier qu'elle ne découle pas des questions précédentes.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Exercice 1. ($\approx 25/90$)

Soient $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -x+2y-2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$, et les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

① Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

② Déterminer une base du noyau de φ. L'application φ est-elle un automorphisme ?

③ Déduire de ce qui précède la dimension de $\mathrm{Im}\varphi$. L'endomorphisme φ est-il surjectif ?

④ Démontrer que : $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

⑤ Déduire de ce qui précède une base de $\mathrm{Im}\varphi$, et une description de $\mathrm{Im}\varphi$ par des équations linéaires.

⑥ Démontrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$. (le noyau et l'image de φ sont des espaces supplémentaires).

⑦ Prouver que $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Im}\varphi$. (on rappelle que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto u$)

⑧ Montrer que $\forall u \in \mathrm{Im}\varphi,\ \varphi(u) = u$. Calculer ensuite, pour tout $(u, v) \in \mathrm{Im}\varphi \times \mathrm{Ker}\varphi,\ \varphi(u + v)$.

⑨ En déduire que $\varphi \circ \varphi = \varphi$: on dit que φ est un projecteur sur $\mathrm{Im}\varphi$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\varphi$.

Exercice 2. ($\approx 20/100$)

Dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ on considère la courbe $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

① Reconnaître cette courbe.

② Donner les composantes d'un vecteur tangente $\vec{T}(t)$ et d'un vecteur normal $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.

On considère deux points quelconques $A = M(a)$ et $B = M(b)$ de cette courbe, qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes a et b du paramètre t.

③ Donner une équation de la droite T_A, tangente au point A à la courbe $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées de l'intersection A' de T_A avec l'axe des abscisses.

De même, donner une équation de la tangente T_B au point B à la courbe $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de l'intersection B' de T_B avec l'axe des abscisses.

④ Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.

⑤ Déterminer les coordonnées du point M, intersection des deux tangentes T_A et T_B.

⑥ Comparer les ordonnées des points I et M.

⑦ Déterminer les coordonnées du point C qui appartient à la courbe $\mathcal{P}$ et dont l'ordonnée est égale à celle de I.

⑧ Démontrer que la tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est parallèle à la droite (AB).

⑨ Pour $a = -1$ et $b = 2$, faire une figure comportant $\mathcal{P}$, A, B, A', B', $[AB]$, $T_A = (AA')$, $T_B = (BB')$, I, M, C et T_C.

Exercice 3. ($\approx 15/100$)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2^n}$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3

② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

③ À l'aide de la question précédente, prouver que u_n converge vers 0.

④ Montrer que $u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2^n}$. En déduire un équivalent de u_n.

⑤ Donner un équivalent de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ $(n > 0)$. En déduire que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Est-elle décroissante ?

Exercice 4. ($\approx 40/100$)

On note S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles.

On note E l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence : $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

$$E = \left\{ u \in S : \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right\}$$

Partie A. Étude d'un élément de E

Soit v la suite définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1$.

① Calculer les termes v_1, v_2 et v_3.

② Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant -2$.

③ Prouver que v est une suite décroissante, et montrer v converge.

④ Déterminer la limite de v.

⑤ Vérifier qu'on a bien étudié un exemple de suite de E, c'est-à-dire que $v \in E$.

Partie B. Monotonie des suites de E

Soit u une suite de E. On définit la suite d par $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = u_{n+1} - u_n$.

① Démontrer que d_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

② En déduire une expression de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, u_1 et u_0.

③ Discuter, en fonction des valeurs de u_0 et u_1, de la monotonie de la suite u.

Partie C. Étude d'une base de $\mathbb{R}^2$ Soient $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

① Vérifier que $\{a, b\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

② Pour tous $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, déterminer les composantes (α, β) de w dans la base $\{a, b\}$: $w = \alpha a + \beta b$.

Partie D. Structure de E

Soit $\mathcal{L} : E \to \mathbb{R}^2,\ u \mapsto (u_0, u_1)$.

① Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de S.

② Démontrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire.

③ Soit $u \in E$ telle que $u_0 = u_1 = 0$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} = u_n = 0$.
En déduire que le noyau de l'application $\mathcal{L}$ est réduit à $\{0_E\}$.

④ Montrer que l'application $\mathcal{L}$ est un isomorphisme. En déduire la dimension de E.

⑤ Soit w une suite géométrique de raison $r \neq 0$ et de premier terme $w_0 = 1$.
Rappeler l'expression de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que $w \in E \iff r^2 = \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}$. On note r_1 et r_2 les solutions de cette équation. $(r_1 < r_2)$.

⑥ On note e la suite géométrique de raison 1 et de premier terme 1, et f la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Montrer que $\mathcal{L}(e) = a$ et $\mathcal{L}(f) = b$.

⑦ Déduire des deux dernières parties : $\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N} : u_n = (2u_1 - u_0) + 2(u_0 - u_1) \times \dfrac{1}{2^n}$.