Contrôle 5

3 heures, calculatrice et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. Avant de chercher la réponse à une question, vérifier qu'elle ne découle pas des questions précédentes.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Exercice 1. ($\approx 2/12$)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

① $(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$ et $y(1) = 0$

② $y'' + 3y - 4 = \text{ch}(t)$

Exercice 2. ($\approx 3/12$)

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace, et E l'ensemble des vecteurs de l'espace.

La droite $\mathcal{D}'$ est dirigée par $\vec{u} = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ et passe par O, la droite $\mathcal{D}$ a pour équations $\left\{\begin{array}{l} y = z \\ x = 1 \end{array}\right.$, $\mathcal{Q}$ est le plan d'équation $y + z = 0$, et enfin, pour tout réel m, $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

① (a) Donner un vecteur normal $\vec{n}_m$ du plan $\mathcal{P}_m$.
(b) Donner un point et un vecteur de $\mathcal{D}$.
(c) Démontrer que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.

② (a) Calculer $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{u}$. En déduire que la droite $\mathcal{D}'$ n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_m$.
(b) Le plan $\mathcal{R}_m$ est l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. Donner une équation de $\mathcal{R}_m$.

③ Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées du point d'intersection I_m des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$.

④ On note (S) l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$ et Ω le point de $\mathcal{Q}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$. Préciser la nature géométrique de l'ensemble S ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.

⑤ Vérifier que I_m appartient à (S) puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

⑥ Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M de $\mathcal{E}$ par lesquels passe un et un seul plan $\mathcal{P}m$. Quelle est la réunion des plans $\mathcal{P}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

Exercice 3. ($\approx 3/12$)

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère la courbe C de représentation paramétrique $M(t) = (x(t)\,;y(t))$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(t)\sin^2(t) \\ y(t) & = & \sin(t)\cos^2(t) \end{array}\right.$$

① Justifier qu'il suffit de prendre le paramètre t dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ pour étudier toute la courbe.

② (a) Comparer $M(-t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.
(b) Comparer $M(\pi - t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.
(c) Comparer $M(\frac{\pi}{2} - t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.

③ Proposer un intervalle d'étude I qui tienne compte des symétries précédemment trouvées. Préciser par quelles symétries successives on obtient la courbe C à partir du tracé obtenu pour $t \in I$.

④ Calculer les dérivées de x et y et montrer qu'elles peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & \sin(t)(3\cos^2(t) - 1) \\ y'(t) & = & \cos(t)(1 - 3\sin^2(t)) \end{array}\right.$$

Étudier les variations des fonctions x et y et dresser leur tableau de variation conjoint sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$. On notera t_0 le réel de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

⑤ Préciser les coordonnées de $M(0)$, $M(t_0)$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que les vecteurs tangents en ces points.

⑥ Tracer en gras la partie de la courbe C pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et en pointillés la partie complétée par les transformations géométriques que l'on précisera.

⑦ Montrer que si (ρ,θ) sont les coordonnées polaires d'un point de la courbe C, on a $4\rho^2 = \sin^2(2\theta)$.

⑧ En déduire que la courbe C est inscrite dans un disque de centre O et d'un rayon à préciser.

Exercice 4. ($\approx 4/12$)

On note $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation cartésienne $y = \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan. On souhaite déterminer les coordonnées $(a\,;b)$ du centre Ω du cercle (C) qui passe par O et qui est tangent en un point $M\left(t\,;\frac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$, à $(\mathcal{H})$.

Dire que le cercle (C) est tangent au point M à l'hyperbole $(\mathcal{H})$, c'est dire que $M \in (C) \cap (\mathcal{H})$ et que la normale $(\mathcal{N})$ à $(\mathcal{H})$ au point M contient le centre Ω du cercle (C).

① (a) Donner les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{T}$ tangent à $(\mathcal{H})$ au point $M\left(t\,;\frac{1}{t}\right)$.

(b) En déduire une équation cartésienne de la normale $(\mathcal{N})$ à $(\mathcal{H})$ au point $M\left(t\,;\frac{1}{t}\right)$.

(c) Écrire que le point $\Omega(a\,;b)$ appartient à $(\mathcal{N})$ et en déduire qu'une relation (1) liant a, b et t est

$$(1) : at^3 - bt = t^4 - 1$$

② Écrire que $O\Omega^2 = M\Omega^2$ et en déduire qu'une relation (2) liant a, b et t est :

$$(2) : at^3 + bt = \frac{1}{2}(t^4 + 1)$$

③ Déduire des relations (1) et (2) une représentation paramétrique des centres Ω quand t varie.

④ On souhaite étudier la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$x(t) = \frac{3t^4 - 1}{4t^3} \text{ et } y(t) = \frac{-t^4 + 3}{4t} \text{ avec } t \in \mathbb{R}^*$$

(a) Montrer que la courbe (Γ) admet une symétrie de centre O.

(b) Calculer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire une nouvelle symétrie pour la courbe (Γ).

(c) Expliquer pour quoi on peut se contenter d'étudier les variations de $x(t)$, $y(t)$ quand le paramètre t appartient à l'intervalle $]0\,;1]$.

⑤ Donner le tableau des variations conjointes de $x(t)$, $y(t)$ pour $t \in]0\,;1]$. Donner les coordonnées du point $A = (x(1)\,;y(1))$, en déduire celles de $B = (x(-1)\,;y(-1))$.

⑥ On a représenté dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ les graphes de $(\mathcal{H})$ en pointillé et de (Γ) en gras, et les première et deuxième bissectrices.

Les deux branches de (Γ) sont divisées par la première bissectrice en 4 parties (Γ_1), (Γ_2) limitées par A, (Γ_3), (Γ_4) limitées par B.

(a) Préciser, en le justifiant, la partie de (Γ) obtenue quand $t \in]0\,;1]$.

(b) Déterminer les paramètres t_1 et t_2 des points doubles P_1, P_2, (utiliser le fait qu'ils sont invariants si on change t en $-\frac{1}{t}$). On ramènera leur recherche à la résolution de l'équation $T^3 - 3T^2 - 3T + 1 = 0$, de racine évidente -1, et on justifiera qu'il n'y a que deux points doubles, et que $t_2 = \frac{1}{t_1}$.

(c) Déterminer les coordonnées de P_1 (on pourra calculer d'abord $y(t_1)$ puis $y(t_1)^3$ pour trouver une simplification).