Contrôle 3

3 heures, calculatrice et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre. Les questions peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre les résultats des questions précédentes.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiale, avant de le traiter. Avant de chercher la réponse à une question, vérifier qu'elle ne découle pas des questions précédentes.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Exercice 1. Construction d'un pentagone régulier ⋆⋆
Soit $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = z + z^4$ et $\beta = z^2 + z^3$.

Pour $k \in \{0;1;2;3;4\}$, on note M_k le point d'affixe z^k dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\,\vec{v})$.

① Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$. (penser aux sommes de référence)

② En déduire que α et β sont solutions de l'équation $(E)\ :\ X^2 + X - 1 = 0$.

③ Démontrer que $\alpha = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$

④ Résoudre l'équation (E) et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

⑤ Soit H le point d'intersection de (M_1M_4) avec l'axe des abscisses. Montrer que $OH = \cos(\frac{2\pi}{5})$

⑥ Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par i. On note $A(z_A)$ et $B(z_B)$ les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses. (A est le point d'abscisse positive).
Démontrer $z_A = \alpha$, $z_B = \beta$ puis que H est le milieu de $[OA]$.

⑦ En déduire une construction d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet M. Un dessin propre, assez grand et des explications claires sont demandées.

Exercice 2. Nombre de solution d'une équation ⋆
L'objectif du problème est de déterminer le nombre de solutions de $f(x) = a$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$, où f est la fonction suivante :

$$f : [0\,;1[\cup]1;+\infty[\to \mathbb{R},\ \begin{cases} x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

① Calculer la limite de f en 0. La fonction f est-elle continue en 0 ?

② Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - 0}{h}$. Quelle est la tangente à la courbe de f en O ?

③ Dresser le tableau de variations complet de f, en précisant et justifiant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

④ Représenter soigneusement la courbe de f.

⑤ Application : Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ en fonction de la valeur du réel a.

Exercice 3. Autour de arctan ∘sh ⋆⋆
Soit $f : x \mapsto \arccos(\mathrm{th}(x))$ et $g : x \mapsto \arctan(\mathrm{sh}(x))$

① Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

② Étudier la fonction g et la représenter soigneusement.

③ Application 1 : montrer que pour tout réel x, $f(x) + g(x)$ est constante et déterminer cette constante. Représenter la courbe de f à partir de la courbe de g, en expliquant comment.

④ Application 2 : calculer $I_t = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$, puis $\lim\limits_{t\to+\infty} I_t$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 4. Cosinus et sinus en fonction de la tangente de l'arc moitié ⋆⋆
L'objectif du problème est de démontrer que

$$\forall\theta \in \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ où } t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on définit $z' = \mathrm{i} \cdot \dfrac{1-z}{1+z}$.

① Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Montrer que $z = \dfrac{\mathrm{i} - z'}{\mathrm{i} + z'}$.

② On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de θ peut on définir z' ?

③ Montrer que, lorsque z' est définie, $z' = \tan(\frac{\theta}{2})$. (indication : angle moitié).

④ Mettre $\dfrac{\mathrm{i} - t}{\mathrm{i} + t}$ sous forme algébrique ($t \in \mathbb{R}$).

⑤ Déduire des questions précédentes les deux égalités présentées au début du problème.

⑥ Application : trouver le module et un argument de $a\left(\dfrac{1+\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}b}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Somme de puissances d'entiers ⋆⋆⋆
On présente une méthode permettant le calcul des sommes $\mathcal{S}_n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$ où $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

① Écrire sans le symbole Σ, puis calculer les sommes $\mathcal{S}_4^1, \mathcal{S}_4^2$, $\mathcal{S}_4^3$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\binom{k}{1}$.

② Soit p un entier naturel. Démontrer par récurrence sur $n \geqslant p$ que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

③ En utilisant le résultat de la question 2 pour une valeur de p bien choisie, montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathcal{S}_n^1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}$. En déduire $\mathcal{S}_n^1$.

④ Pour tout $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$, simplifier $\dbinom{k}{2}$. En utilisant la question 2, en déduire que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3}$.

⑤ En développant la somme, montrer que pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{S}_n^2 - \frac{1}{2}\mathcal{S}_n^1$.

⑥ Déduire des deux questions précédentes une expression de $\mathcal{S}_n^2$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

⑦ Mettre en œuvre une démarche semblable pour exprimer $\mathcal{S}_n^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.