Correction du contrôle 1a

Exercice 1. Récurrences

① Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$.

⋆ initialisation : $\displaystyle\sum_{p=0}^{0} p = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

⋆ on suppose la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$.

On va démontrer la propriété au rang $n+1$: $\displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{p=0}^{n+1} p = n+1+\sum_{p=0}^{n} p = \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

⋆ conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$.

② Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

À partir de $(*)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\ln(x) = \ln(x^n)$, par récurrence.

⋆ initialisation : $1 \cdot \ln(x) = \ln(x)$ et $\ln(x^1) = \ln(x)$ donc la propriété est vraie au rang 1.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie pour un rang $n \geqslant 1$: $n\ln(x) = \ln(x^n)$. Démontrons que la propriété est alors vraie au rang $n+1$: $(n+1)\ln(x) = \ln(x^{n+1})$.

$(n+1)\ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = \ln(x^n) + \ln(x) = \ln(x^n \cdot x) = \ln(x^{n+1})$.

La deuxième égalité utilise l'hypothèse de récurrence, et la troisième, la formule (*).

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

⋆ conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\ln(x) = \ln(x^n)$.

Finalement, on a bien : $\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*, n\ln(x) = \ln(x^n)$.

Exercice 2. Somme et racine

① $s = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}} + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

La somme s compte $99 - 0 + 1 = 100$ termes.

② Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$-\sqrt{k} + \sqrt{k+1} = \frac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $-\sqrt{k} + \sqrt{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

③ D'après les questions précédentes,

$$s = 1 + + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}} + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

$s = -\sqrt{(}0) + \sqrt{1} - \sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdots - \sqrt{98} + \sqrt{99} - \sqrt{99} + \sqrt{100} = \sqrt{100} = 10$.

Donc $s = 10$.

Remarque : on aurait pu travailler avec le symbole Σ :

$$s = \sum_{k=0}^{99} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{99} \sqrt{k+1} - \sum_{k=0}^{99} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{100} \sqrt{k} - \sum_{k=0}^{99} \sqrt{k} = \sqrt{100} - \sqrt{0} = 10.$$

Correction du contrôle 1b

Exercice 1. Récurrences

① Soit $x \in \mathbb{C}$.

À partir de $(*)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$, démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$, par récurrence.

⋆ initialisation : $(\mathrm{e}^x)^1 = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^{1x} = \mathrm{e}^x$ donc la propriété est vraie au rang 1.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie pour un rang $n \geqslant 1$: $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$. Démontrons que la propriété est alors vraie au rang $n+1$: $(\mathrm{e}^x)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)x}$.

$(\mathrm{e}^x)^{n+1} = (\mathrm{e}^x)^n \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{nx} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{nx+x} = \mathrm{e}^{(n+1)x}$

La deuxième égalité utilise l'hypothèse de récurrence, et la troisième, la formule (*).

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

⋆ conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.

Finalement, on a bien : $\forall (x,n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*,\ (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.

② Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$.

⋆ initialisation : $\displaystyle\sum_{p=0}^{0} 2p+1 = 2\cdot 0 + 1 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

⋆ on suppose la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$.

On va démontrer la propriété au rang $n+1$: $\displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} 2p+1 = (n+2)^2$

$$\sum_{p=0}^{n+1} 2p+1 = 2(n+1)+1 + \sum_{p=0}^{n} 2p+1 = 2n+3+(n+1)^2 = 2n+3+n^2+2n+1 = n^2+2\cdot 2n+2^2 = (n+2)^2$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

⋆ conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$

Exercice 2. Somme et quotient

①

$$s = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100} + \frac{1}{100\cdot 101}$$

La somme s compte $99 - 0 + 1 = 100$ termes.

② Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{k+1} - \frac{k+2}{=} \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{k+2}{=} \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$.

③ D'après les questions précédentes,

$$s = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100} + \frac{1}{100\cdot 101}$$

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

donc $s = \dfrac{100}{101}$

Remarque : on aurait pu travailler avec le symbole Σ :

$$s = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

Correction du DM 1

Exercices 1, 3.2, 4.3, 4.5, 5.1.

Exercice ??. Vrai - Faux

① Faux, la négation est vraie : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ (x = y - 1), y > x$
② Vrai, $y = 0$ convient : $\forall x \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x$
③ Vrai, $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ (x = y + 1),\ y \leqslant x$
④ Vrai, car $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = 0$ (ce prouve par exemple via l'inégalité de Bernoulli)
⑤ Faux : $x = 0$ vérifie $x^2 = 0$
⑥ Vrai, la règle des signes impose $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0 \geqslant -5$.
⑦ Vrai, $x = -1$ convient : $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.
⑧ Vrai, par définition de la fonction exponentielle comme la réciproque de ln.
⑨ Faux. On a $3x + 5 < 0 \iff x < -\dfrac{5}{3}$ donc il n'y a pas de solution positive.
⑩ Faux, pour $x = 0,\ x^2 - 4 = -4 < 0$ ne peut être égal à une racine carrée.
⑪ Vrai, $x = 0$ convient : $\sqrt{0} = 0 = -0$.

Exercice 1. Récurrences

① Notons $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété : f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = nx^{n-1}$.

⋆ initialisation : on sait que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 1$. Par ailleurs, $1 \times x^{1-1} = 1$ pour tout x réel (avec la convention $0^0 = 1$). La propriété est donc vraie au rang 1.

⋆ transmission : on suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geqslant 1$: f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = nx^{n-1}$. Montrons qu'alors la propriété est vraie au rang $n+1$: f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}'(x) = (n+1)x^n$

On remarque que $f_{n+1} = f_n f_1$, donc comme produit de fonctions dérivables, f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$, et de plus :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}'(x) = f_n'(x)f_1(x) + f_n(x)f_1'(x) = nx^{n-1} \times x + x^n \times 1 = (n+1)x^n$

la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

⋆ par le principe de récurrence, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Exercice ??. Sommes de référence

① Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{n+1}}{1 - \mathrm{e}}$ car $\mathrm{e} \neq 1$. Ainsi, $S = \dfrac{\mathrm{e}^{n+1} - 1}{\mathrm{e} - 1}$

② La somme compte $(n+1)$ termes (de 0 à n), tous égaux à -2. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2) = -2(n+1)$.

Exercice ??. Sommes télescopiques

① Il s'agit d'une somme télescopique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$

On effectue le changement de variables $j = k + 1$ dans la seconde somme :

$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j) = \ln(1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$

donc $S = -\ln(n+1)$.

Contrôle 1a

20 minutes, calculatrice et documents interdits.

Les questions peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre les résultats des questions précédentes.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. Récurrences $\star$
Démontrer par récurrence :

① $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ (où $n \in \mathbb{N}$)

② $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\ln(x) = \ln(x^n) \quad$ (où $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé). (1)

Exercice 2. Somme et racine $\star$
On pose $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

① Écrire s avec des pointillés. Combien s compte-t-elle de termes ?

② Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = -\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$

③ Déduire de la question précédente une autre écriture de s. Calculer la valeur exacte de s.

(1). on rappelle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$.

Contrôle 1b

20 minutes, calculatrice et documents interdits.

Les questions peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre les résultats des questions précédentes.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. Récurrences ⋆
Démontrer par récurrence :

① $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx} \quad$ (où $x \in \mathbb{C}$ fixé). (2)

② $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2p + 1 = (n+1)^2$ (où $n \in \mathbb{N}$)

Exercice 2. Somme et quotient ⋆
On pose $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

① Écrire s avec des pointillés. Combien s compte-t-elle de termes ?

② Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$

③ Déduire de la question précédente une autre écriture de s. Calculer la valeur exacte de s.

(2). on rappelle que $\forall (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$.