§ 24 : Révisions

1. Courbes paramétrées : compléments

1.1 Rappels : étude d'une courbe, longueur d'une courbe, abscisse curviligne

Exemple 1. On appelle cycloïde la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\forall t \in \mathbb{R},\ \vec{g}(t) = \left| \begin{array}{l} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{array} \right.$.

① Pour tout réel t, exprimer $x(t+2\pi)$ et $y(t+2\pi)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
Expliquer comment obtenir la courbe $\mathcal{C}$ à partir de sa restriction obtenue pour $t \in [0\,;2\pi]$.

② Expliquer comment l'étude de $\vec{g}$ sur l'intervalle $I = [0\,;\pi]$ permet d'obtenir $\mathcal{C}$.

③ Donner le tableau de variations simultanées de $\vec{g}$ sur $[0\,;\pi]$.
Donner les vecteurs tangents à $\mathcal{C}$ en $M(0)$ et $M(\pi)$.

④ Représenter $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-3\pi\,;3\pi]$.

Définition 1. La *longueur d'une courbe* paramétrée par $\vec{g}$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ est

$$\mathcal{L}_{\vec{g}}([a\,;b]) = \int_a^b \|\vec{g}(u)\|\mathrm{d}u.$$

Une *abscisse curviligne* d'une courbe paramétrée par $\vec{g}$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $s : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $s'(t) = \|\vec{g}(t)\|$.

Exemple 2. (suite de l'exemple 1 de la cycloïde)

① Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R},\ \|\vec{g}'(t)\| = 2\left|\cos \frac{t}{2}\right|$.

② En déduire la longueur d'une arche de la cycloïde.

1.2 Repère de Frenet

Remarque 1. Paramétrer une courbe à l'aide de l'abscisse curviligne en posant $\vec{f} = \vec{g} \circ s^{\langle -1 \rangle}$ permet d'obtenir un paramétrage indépendant du paramétrage de départ, dont l'interprétation cinétique est le parcourt de la trajectoire à vitesse 1.

Définition 2. Le repère de Frenet au point régulier $M(t)$ de paramètre t est $\left(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t)\right)$ où

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|\vec{g}'(t)\|}\vec{g}'(t)$$

et $\vec{N}$ est construit de sorte que le repère soit orthonormé direct.

Exemple 3. (suite de l'exemple 1 de la cycloïde)

① Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ et en déduire la formule présentée dans la définition 2.

② Exprimer en fonction de t les coordonnées du repère de Frenet de la courbe paramétrée par $\vec{g}$.

③ Représenter le repère de Frenet pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$

1.3 Courbure

Définition 3. On appelle *détermination angulaire* de la courbe paramétrée par $\vec{g}$ sur l'intervalle I la fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ et } \vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

La *courbure* de la courbe paramétrée par $\vec{g}$ au point de paramètre t est

$$\gamma(t)=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{\alpha'(t)}{s'(t)}=\frac{\det(\vec{g}',\vec{g}'')}{\|\vec{g}'\|^3}$$

Le *rayon de courbure* au point de paramètre t est $r(t)=\dfrac{1}{\gamma(t)}$ et le *cercle osculateur* à la courbe en ce point, est le cercle de centre $M(t)+R(t)\vec{N}(t)$ et de rayon $R(t)$. C'est le cercle qui épouse au mieux la forme de la courbe au voisinage de $M(t)$.

Exemple 4. (suite de l'exemple 1 de la cycloïde)

① Pour $t\in[0\,;\pi]$, donner une détermination angulaire α de la courbe.

② Calculer le rayon de courbure en tout point $M(t)$ où $0\leqslant t<\pi$.

③ Représenter le cercle osculateur en $M(\frac{\pi}{2})$

1.4 D'autres exemples

Exemple 5. On appelle tractrice la courbe Γ paramétrée par $\forall t\in\mathbb{R},\ \vec{g}(t)=\left|\begin{array}{l} x(t)=t-\operatorname{th}(t)\\ y(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}\end{array}\right.$.

① Représenter Γ, après une étude de $\vec{g}$ (en particulier du point stationnaire).

② Donner une abscisse curviligne s de Γ.

③ Donner une détermination angulaire α de Γ, puis la courbure en tout point birégulier de la courbe.

④ Déterminer et représenter le lieu des centre de courbure de Γ.

Exemple 6. On considère la cardioïde d'équation polaire $r=1+\cos\theta$.

① Construire C.

② Calculer la longueur de C.

③ Calculer la courbure de C en tout point régulier, à partir d'une détermination angulaire.

2. Problème d'analyse ATS 2011

Exercice 1. Étude d'une primitive de l'inverse du cosinus — `écrit ATS 2011`

Les questions 3) et 4) sont indépendantes des questions 1) et 2).

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{d}\nu}{\cos(\nu)}$ pour $x\in]-\pi\,;\pi[$.

① (a) Calculer $f'(x)$. Montrer que f est impaire et strictement croissante.

(b) Donner un équivalent simple de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=\sin u$ au voisinage de 0.

En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\nu}{\sin\nu}=+\infty$, et que f est une bijection de $]-\pi\,;\pi[$ vers $\mathbb{R}$.

On note $g=f^{-1}$, et donc, dans leurs domaine de définition, on a : $y=f(x)\iff x=g(y)$.

② (a) Montrer que $g'(y)=2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g''(y)$.

(b) Montrer que $g(t)$ et solution de l'équation différentielle en t :

$$X''(t)+\sin\big(X(t)\big)=0 \text{ avec } t\geqslant 0,\ X(0)=0,\ X'(0)=a>0$$

pour une valeur de a à préciser.

③ Calculer $h(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{2\mathrm{d}u}{1-u^2}$ pour $t\in]-1\,;1[$. [on utilisera la décomposition $\dfrac{2}{1-u^2}=\dfrac{a}{1-u}+\dfrac{b}{1+u}$].

④ Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u=\tan\left(\dfrac{\nu}{2}\right)$.

(a) Exprimer ν en fonction de u puis $\mathrm{d}\nu$ en fonction de u et $\mathrm{d}u$.

(b) Montrer que $\cos(\nu)=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ [Indication : on peut calculer d'abord $\cos^2\left(\dfrac{\nu}{2}\right)$].

(c) Faire le calcul de l'intégrale définissant $f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

3. Problème Fourier ATS 2009

Exercice 2. Autour de la série de Fourier du logarithme de sinus `écrit ATS 2009`

Soient les fonctions $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}$ et $S_n(x) = 2\Re\mathrm{e}(T_n(x)) - 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ n \in \mathbb{N}$.

Rappel : $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ et $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

① Calculer $T_n(x)$, en déduire que $\Re\mathrm{e}(T_n(x)) = \cos(nx)\dfrac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)}$.

② (a) Montrer que $S_n = \dfrac{\sin[(2n+1)x]}{\sin(x)} = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)$. On posera $S_n(0) = S_n(\pi) = 2n+1$.

(b) Interpréter cela comme une série de Fourier de période π, et en déduire la valeur de $I_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} S_n(x)\mathrm{d}x$, puis celle de $J_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(S_n(x))^2\mathrm{d}x$.

③ Soit la fonction π-périodique définie par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \ln(\sin(x))$ si $0 < x < \pi$.

(a) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}(\ln(x))^2$? En déduire que $\displaystyle\int_0^1(\ln(x))^2\mathrm{d}x$ est convergente.

(b) Montrer que $\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi}(f(x))^2\mathrm{d}x$ converge.

On admettra que cette propriété de carré intégrable permet d'étendre à f le développement en série de Fourier et ses propriétés connues pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

(c) Pour $x \in]0\,;\pi[$, montrer que $f(-x) = f(\pi - x) = f(x)$. En déduire que le développement en série de Fourier de f s'écrit : $S_f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2nx)$; donner l'expression intégrale de a_n pour $n > 0$.

(d) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(\sin(x))\sin(2nx)$? En déduire en intégrant par parties que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{-1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos x\frac{\sin(2nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x \text{ puis que } a_n = \frac{-1}{2n}(I_n + I_{n-1}) = \frac{-1}{n}.$$

④ On admet que $f(x) = S_f(x)$ si $0 < x < \pi$. En choisissant une valeur particulière de x, montrer que $a_0 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Justifier que cette dernière série converge.

⑤ Quel est le rayon de convergence et la somme de la série entière $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$?

⑥ On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Donner la valeur de $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}[\ln(\sin(x))]^2\mathrm{d}x$.

3.1 Extrait du rapport de Jury

Moins souvent traité que le précédent, encore que quelques copies atteignent presque le maximum des points prévus. Les candidats butent souvent à la première question sur le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique. Parfois, ils transforment d'emblée les exponentielles complexes en cosinus et sinus, ce qui le rend le calcul impossible. Une des grandes difficultés des candidats est de comprendre que si une fonction π–périodique est définie sur $]0\,;\pi[$, cela n'a pas de sens de calculer $f(-x) = \ln(\sin(-x))$. Il faudrait pour éviter ce genre d'erreur prendre l'habitude de faire une petite représentation graphique.

Les notions de série et de série entière sont vraiment mal maîtrisées. On a souvent lu que $\sum\frac{1}{n}$ converge, que $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ est absolument convergente, ou que le rayon de convergence de $\sum\frac{(-1)^n}{n}x^n$ est infini.

4. Séries entières et intégrales généralisées ATS 2008

Exercice 3. Autour du sinus intégral écrit ATS 2008

Pour b et t strictement positifs, on considère les fonctions F et I définies par :

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}x, \text{ et } I(b) = \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$$

① (a) Que vaut $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$? Justifier que F et I sont définies sur $\mathbb{R}_*^+$.

(b) Montrer que $\forall x \geqslant 0, \ |\sin x| \leqslant x$. En déduire que $|F(t)| \leqslant \frac{1}{t}$, puis calculer $\lim_{t \to \infty} F(t)$.

② On admet que F' peut se calculer en dérivant sous l'intégrale et donc que $F'(t) = \int_0^\infty -\sin(x)\mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}x$ pour $t > 0$. Montrer que $F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$.

En déduire la valeur de $F(t)$ pour $t > 0$, en utilisant la limite trouvée à la question précédente.

③ (a) Donner le développement en série entière de $\frac{\sin(x)}{x}$.

(b) Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \ \int_0^\infty u^n \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u = n!$.

(c) On admet que pour $t > 1$ on peut intégrer terme à terme le développement en série obtenu dans l'intégrale définissant $F(t)$. En déduire que si $t > 1$ on a :

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)t^{2k+1}}$$

(d) Comment retrouver ce résultat à partir de l'expression de $F(t)$ obtenue en (2) ?

④ À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$ existe.

On posera alors : $F(0) = \lim_{b \to \infty} I(b) = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$

⑤ On admet que F est continue en 0. En déduire la valeur de $F(0)$.

⑥ Montrer que $\big|I((n-1)\pi) - I(n\pi)\big| \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$. En déduire que $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x$ diverge.

4.1 Extrait du rapport de Jury

[L'exercice] a été assez souvent abordé. Cependant, on y observe beaucoup de lacunes. Par exemple, la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0, ce qui est quand même une question très élémentaire sur les équivalents, a donné pour résultat 0, 1 ou $+\infty$ avec sensiblement un tiers des candidats ayant fait cette question pour chacune de ces réponses. De même, toutes les questions un peu théoriques de convergence ou de définition ont été laissées ou ont eu des réponses fausses. La démonstration par récurrence de la question (3)b a donné des affirmations cocasses : on écrit la formule pour n, puis $n + 1$, et sans rien d'autre on affirme que l'on a fait la démonstration par récurrence.

En définitive, l'essentiel de ce qui a été fait de cet exercice était du calcul « formel ». Les dernières question n'ont été que très rarement abordées.

5. Algèbre linéaire ATS 2010

Exercice 4. écrit ATS 2010

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et f un endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

① (a) Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

(b) Montrer que f a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$ [Indication : on vérifiera que $\lambda_1 = 2$ est la plus grande des valeurs propres].

② Déterminer deux vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que $(\vec{u})$ est une base du sous–espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ et $(\vec{v})$ une base du sous–espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_2}$.

③ Pourquoi la matrice A n'est–elle pas diagonalisable ?

④ (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base de E. [$\vec{k}$ est de composante $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$].

(b) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(d) Montrer que dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est de la forme : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en précisant α.

⑤ Calculer B^2, B^3. En déduire une formule pour B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette formule sera démontrée par récurrence.

⑥ Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.

⑦ Montrer que B est inversible. Calculer B^{-1}. Démontrer que la formule trouvée au (5) est valable pour $n \in \mathbb{Z}$. [On note $B^{-p} = (B^{-1})^p$.]

⑧ En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

5.1 Extrait du rapport de Jury

[L'exercice] a montré les lacunes habituelles en algèbre linéaire. On a rencontré quelques vecteurs propres nuls, beaucoup de valeurs propres ou de vecteurs propres faux. Pourtant, nous rappelons presque chaque année qu'il est très facile de vérifier si un vecteur calculé est bien un vecteur propre. Nous avons été assez surpris d'observer plus fréquemment que les années précédentes des candidats qui inversent les matrices de taille 3 par identification, parfois avec succès, mais souvent avec des fautes de calcul. Pour un calcul d'inverse de matrice, comme pour un vecteur propre, il est pourtant facile en petite dimension de vérifier si l'inverse calculé est correct.

Souvent, le seul argument invoqué pour dire que la matrice n'est pas diagonalisable est qu'une valeur propre est double.

Enfin, comme dans le premier exercice, les démonstrations par récurrence sont rarement faites correctement.

6. Algèbre linéaire ATS 2008

Dans un espace vectoriel E de dimension 3 on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans E, l'application identique id a pour matrice I.

L'objet de cette exercice est de déterminer toute les matrices M telles que $M^2 = A$.

① Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\text{Ker}(f)$ de la forme : $\vec{u} = \vec{\jmath} + a\vec{k}$ (on calculera a).

② Calculer le polynôme caractéristique de A. Déterminer ses racines.

③ Déterminer le sous–espace propre associé à la valeur propre non nulle de A. Montrer qu'il est de dimension 1 et qu'il est engendré par un vecteur de la forme : $\vec{v} = \vec{\jmath} + b\vec{k}$ (on calculera b).

④ La matrice A est–elle diagonalisable ? Expliquer pourquoi.

⑤ (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{\imath})$ est une base de E.

(b) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.

(d) Donner une relation entre A, P et B.

Soit M une matrice telle que $M^2 = A$.

On note g l'endomorphisme de matrice M dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $g \circ g = f$.

⑥ (a) Montrer que l'on a $f \circ g = g \circ f$.

(b) Calculer de deux manières $f \circ g(\vec{u})$ et $f \circ g(\vec{v})$. En déduire que $g(\vec{u}) = \vec{0}$ et qu'il existe un réel x tel que $g(\vec{v}) = x\vec{v}$.

(c) En déduire que l'on a $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

(d) Déterminer les deux valeurs possibles de $P^{-1}MP$ puis de M.

6.1 Extrait du rapport de Jury

Le début de l'exercice d'algèbre linéaire a été vu par la majorité des candidats. Mais on constate que les calculs sont menés avec les maladresses habituelles. Rappelons quand même que si on se trompe dans un calcul de vecteur propre, il est très facile de le savoir en effectuant un produit matriciel. Il est navrant de constater que dans certaines copies, une faute de calcul initiale se propage pendant tout l'exercice. En général, les candidats s'arrêtaient à l'écriture de la matrice de f dans la nouvelle base. Le plus souvent, ils ne savent pas déduire cette matrice de l'image des vecteurs de la base et se contentent d'écrire un peu au hasard $P^{-1}AP$ ou PAP^{-1}. La question 6 a été rarement vue.