§ 22 : Espaces vectoriels euclidiens

1. Espace euclidien

1.1 Produit scalaire et norme

Définition 1. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Un *produit scalaire* sur E est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
⋆ bilinéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v,w) \in E^3,\ \langle \lambda u + v | w \rangle = \lambda \langle u | w \rangle + \langle v | w \rangle$ et $\langle w | \lambda u + v \rangle = \lambda \langle w | u \rangle + \langle w | v \rangle$.
⋆ symétrie : $\forall (u,v) \in E^2,\ \langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle$.
⋆ positivité : $\forall u \in E,\ \langle u | u \rangle \geqslant 0$.
⋆ caractère défini : $\langle u | u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est un *espace euclidien.*

Si $u \in E$, le nombre $\|u\| = \sqrt{\langle u\,;u \rangle}$ est la *norme* du vecteur u.

Deux vecteurs u et v de E sont *orthogonaux* ($u \perp v$) si et seulement si $\langle u | v \rangle = 0$

Exemple 1. Un produit scalaire : $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \big(U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\,; V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\big) \mapsto \langle U | V \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$.

On note que $\langle U | V \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = (u_1, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = {}^{\top}UV$ où $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Exemple 2. L'application φ suivante définit un produit scalaire sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π–périodiques :

$$\varphi : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R},\ \big(f\,;g\big) \mapsto \varphi(f,g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 3. ✎ Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que l'application suivante est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\psi_n : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R},\ (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

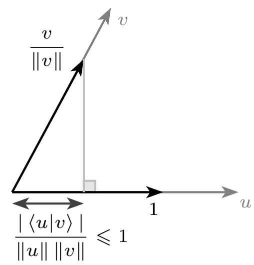
Dans $\mathbb{R}_3[X]$: calculer $\|1 + X\|$ et trouver l'ensemble des polynômes orthogonaux à $1 + X$.

Proposition 1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient un $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et u, v des vecteurs de E.

$$\forall (u,v) \in E \times E,\ \langle u | v \rangle^2 \leqslant \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle \text{ ou : } \big|\langle u | v \rangle\big| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

On a égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.



Démonstration. ✎ Développer le polynôme en t : $\langle tu | v \rangle^2$, puis traduire en une égalité sur son discriminant le fait qu'il est positif. Le cas d'égalité traduit le fait que le discriminant est nul. □

Proposition 2. Inégalité triangulaire

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et u et v deux vecteurs de E.

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \big|\|u\| - \|v\|\big| \leqslant \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

Démonstration. Par bilinéarité, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u | v \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$(\|u\| - \|v\|)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| \leqslant \|u + v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$.
On prend alors la racine carrée des deux extrémités et du membre central. □

Proposition 3. Pythagore

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Alors on a : $u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Démonstration. ✎ Repose sur la bilinéarité du produit scalaire. □

1.2 Projection orthogonale

Proposition 4. Sous-espace orthogonal

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$F^\perp = \{x \in E,\ \forall u \in F,\ \langle x|u\rangle = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace orthogonal* à F.
C'est un sous-espace supplémentaire de F : $F \oplus F^\perp = E$.

Démonstration. $\forall u \in F,\ \langle 0|u\rangle = 0$, de sorte que $0 \in F^\perp$: cet ensemble est non vide.

Par bilinéarité du produit scalaire,

$\forall (x,y) \in F^\perp \times F^\perp,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in F,\ \langle \lambda x + y|u\rangle = \lambda\langle x|u\rangle + \langle y|u\rangle = \lambda 0 + 0 = 0$ donc $\lambda x + y \in F^\perp$.

$F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

Si $x \in F \cap F^\perp$ alors $\langle x|x\rangle = 0$ de sorte que $x = 0$: $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Or, par la formule de Grassmann, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ donc finalement : $F \oplus F^\perp = E$. □

Définition 2. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E. La *projection orthogonale* sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$:

$$\mathrm{proj}_F : E = F \oplus F^\perp \longrightarrow F,\ x = x_F + x_{F^\perp} \mapsto x_F$$

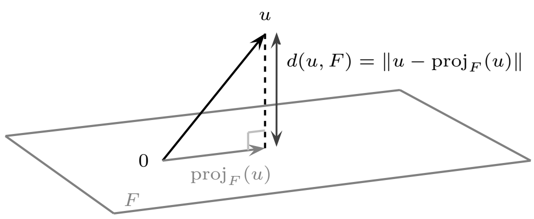
On appelle de même l'endomorphisme défini identiquement, mais d'espace d'arrivé E.

Remarque 1. Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in E \neq 0$. La projection orthogonale sur la droite vectorielle $\mathbb{R}u$ est l'application :

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{R}u} : E \longrightarrow F,\ x \mapsto \frac{\langle u|x\rangle}{\|u\|^2} u$$

Définition 3. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien.
La *distance entre les vecteurs u et v* est $d(u,v) = \|u - v\|$.
La *distance entre un vecteur u de E* et un sous-espace vectoriel F de E est le nombre défini par :

$$d(u,F) = \|u - \mathrm{proj}_F(u)\|$$



Remarque 2. Par l'inégalité triangulaire, on a : $\forall v \in F,\ d(u,F) \leqslant d(u,v) = \|u - v\|$ avec égalité si et seulement si $v = \mathrm{proj}_F(u)$.

Exemple 4. ✎ Déterminer a et b de sorte que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\, \mathrm{d}x$ soit minimale.

1.3 Base orthonormale

Définition 4. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Une famille $\{u_i\}$ de vecteurs non nuls de E est *orthogonale* si et seulement si elle est composée de vecteurs deux à deux orthogonaux : $\forall i \neq j,\ u_i \perp u_j$.

Proposition 5.

Une famille orthogonale d'un espace vectoriel euclidien est une famille libre.
En particulier, une famille orthogonale de n vecteurs d'un espace euclidien de dimension n est une base.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} = \{u_i\}$ est une famille orthogonale et $\sum \alpha_i u_i$ une combinaison nulle de $\mathcal{F}$. En prenant le produit scalaire de l'équation avec u_j, et en tenant compte de $\forall i \neq j,\ \langle u_i | u_j \rangle = 0$, on a :

$$\forall j,\ 0 = \Big\langle \sum \alpha_i u_i \Big| u_j \Big\rangle = \sum \alpha_i \langle u_i | u_j \rangle = \alpha_j \|u_j\|^2 \text{ donc } \alpha_j = 0 \text{ car } u_j \neq 0.$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre. □

Définition 5. Une base d'un espace vectoriel euclidien est *orthogonale* si c'est une base formée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Une base d'un espace vectoriel euclidien est *orthonormale* ou *orthonormée* si c'est une base orthogonale formée de vecteurs unitaires (tous de norme 1).

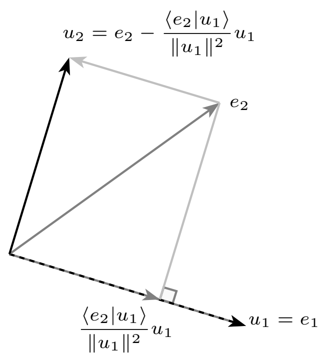
Remarque 3. Soit $\mathcal{B} = (e_i)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien. Si x_i est la coordonnée de $x \in E$ suivant e_i, alors : $x_i = \langle x | e_i \rangle$.

Proposition 6. Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$.
On définit la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ par récurrence en posant :

$$u_1 = e_1,\ \forall k \in [\![2\,;n]\!],\ u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_j | e_k \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

Alors
⋆ la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthogonale, et
⋆ $\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.



Démonstration. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'étant donnés n vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ d'un espace euclidien, la famille définie dans l'énoncé $(u_1, \ldots, u_n)$ orthogonale et $\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.

⋆ initialisation : $u_1 = e_1$ est orthogonale (composée d'un seul vecteur non nul) et vérifie $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie au rang n, montrons la au rang suivant. Soient $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une famille libre de vecteurs d'un espace euclidien.

On veut prouver que $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ est orthogonale et par hypothèse de récurrence, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est orthogonale, il suffit donc de voir $\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ u_k \perp u_{n+1}$. Et on a en effet $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\langle u_k | u_{n+1} \rangle = \Big\langle u_k \Big| e_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle u_j | e_{n+1} \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \Big\rangle = \langle u_k | e_{n+1} \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle u_j | e_{n+1} \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_k | u_j \rangle = \langle u_k | e_{n+1} \rangle - \frac{\langle u_k | e_{n+1} \rangle}{\|u_k\|^2} \|u_k\|^2 = 0$$

Toujours par hypothèse : $\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$, et pour $k = n+1$ on a par définition de u_{n+1} : $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n, u_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$.

La propriété énoncée est donc vraie au rang $n+1$.

⋆ conclusion : la proposition est vraie. □

Remarque 4. L'existence de base et le procédé d'orthogonalisation de la proposition 6 assurent l'existence d'une base orthonormée pour tout espace euclidien.

Exemple 5. ✎ Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini dans l'exemple 3, déterminer une base orthonormale en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique.

2. Groupe orthogonal

2.1 Définition du groupe orthogonal d'un espace euclidien

Définition 6. Soit $(E, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Un endomorphisme u de E est un *automorphisme orthogonal* si et seulement si,

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$$

Le *groupe orthogonal* $\mathcal{O}(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux.

Remarque 5. Un tel endomorphisme est bien un automorphisme : il est injectif, car si $u(x) = 0$ alors $\langle u(x)|u(x)\rangle = \langle x|x\rangle = 0$ donc $x = 0$. Puisque E est de dimension finie, le théorème du rang assure que l'endomorphisme u est surjectif : $\dim E = \mathrm{rg}(u)$.

Remarque 6. La définition 6 appliquée à $x = y$ montre qu'un automorphisme orthogonal u préserve la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$. En particulier, si λ est valeur propre de u, alors $|\lambda| = 1$.

2.2 Matrices orthogonales

Définition 7. Une *matrice orthogonale* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice telle que ${}^{\top}\!AA = \mathrm{Id}$.

On note $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 7. L'endomorphisme canoniquement associé à une matrice orthogonal est un automorphisme orthogonal. En effet, si $A \in \mathcal{O}_n$,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle Ax|Ay\rangle = {}^{\top}\!(Ax)Ay = {}^{\top}\!x{}^{\top}\!AAy = {}^{\top}\!xy = \langle x|y\rangle$$

Remarque 8. La matrice de passage d'une base orthonormale dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

Remarque 9. Une matrice orthogonale A est inversible d'inverse sa transposée ${}^{\top}\!A$. Cette propriété facilite les changements de base orthogonaux.

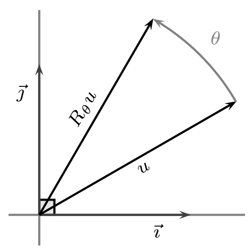
Remarque 10. $\mathcal{O}_n$ est un groupe multiplicatif : le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, l'identité est orthogonale et l'inverse d'une matrice orthogonale l'est aussi.

2.3 Groupe orthogonal du plan

Proposition 7.

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le groupe orthogonal du plan $\mathcal{O}_2$ est composé :

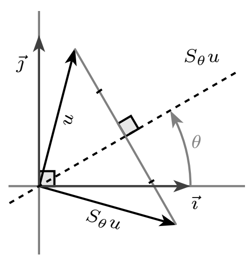
- ⋆ des rotations de centre 0 et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- ⋆ des réflexions d'axe formant un angle θ avec $\vec{\imath}$: $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$



Démonstration. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2$ alors ${}^{\top}\!AA = \mathrm{Id}$,

donc $\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $z = a + \mathrm{i}b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ($|z|^2 = a^2 + b^2 = 1$) et de même, $z' = d + \mathrm{i}c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, la condition $ac + bd = 0$ implique $\Im\mathrm{m}\, zz' = 0$ donc $\theta + \theta' = 0\ [\pi]$. Le premier cas correspond à $\theta = -\theta'\ [2\pi]$, le second à $\theta = \pi - \theta'\ [2\pi]$. □



Méthode 1. Reconnaître une isométrie du plan

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ${}^{\top}\!AA = \mathrm{Id}$ alors $A \in \mathcal{O}_2$. On distingue deux cas :
- ⋆ $\det A = 1$: A est la matrice d'une rotation de centre O et d'angle θ (cos et sin dans la première colonne).
- ⋆ $\det A = -1$: A est la matrice d'une réflexion, les vecteurs invariants dirigent l'axe de réflexion.

2.4 Groupe orthogonal de l'espace

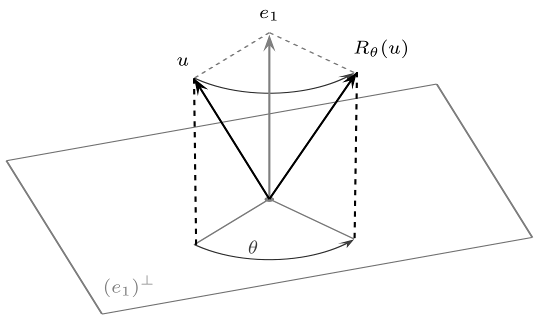
Proposition 8.

Soit $A \in \mathcal{O}_3$. Il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, telle qu'en notant $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$ ($\det P = 1$), on ait :

$$^{\top}PAP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

- ⋆ si $\det A = +1$: $\pm 1 = 1$ et on a une rotation d'axe dirigé et orienté par e_1 et d'angle θ.
- ⋆ si $\det A = -1$: $\pm 1 = -1$ et on a la composée d'une symétrie orthogonale par rapport au plan de vecteur normal $\vec{e}_1$ (passant par 0) et la rotation d'axe dirigé et orienté par e_1 et d'angle θ.

Démonstration. Chaque valeur propre λ est de module 1, car la matrice orthogonale préserve la norme : si x est un vecteur propre de valeur propre λ : $\|x\| = \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ donc $|\lambda| = 1$. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3, il a une valeur propre réelle au moins : 1 ou -1. On note e_1 un vecteur propre unitaire associé. La matrice A préserve le plan normal à e_1, et induite un automorphisme orthogonal de ce plan. Quitte à remplacer e_1 par $-e_1$, on peut supposer qu'il s'agit d'une rotation et on conclut grâce à la proposition 7. (*ci–contre : illustration d'une rotation :* $\det A > 0$) □



Méthode 2. Reconnaître une rotation de l'espace

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $^{\top}AA = \mathrm{Id}$. Si $\det A = 1$, on a une rotation et 1 est valeur propre. On cherche un vecteur invariant e_1 de $\ker(A - \mathrm{Id})$. On a $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$ (somme des coefficients diagonaux) et le signe de $\sin\theta$ est le même que celui de $\det(e_1, e_2, Ae_2)$ où e_2 est un vecteur orthogonal à e_1.

Remarque 11. Dans le cas d'une composée de symétrie et de rotation, e_1 est un vecteur propre unitaire de la valeur propre -1, $\mathrm{tr}(A) = 2\cos\theta - 1$ et $\sin\theta$ est l'opposé de celui de $\det(e_1, e_2, Ae_2)$ où e_2 est un vecteur orthogonal à e_1.

3. Endomorphisme symétrique

3.1 Définition et matrice

Définition 8. Un *endomorphisme symétrique* u d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un endomorphisme de E tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle.$$

Remarque 12. La matrice d'un endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E de dimension finie n, dans une base orthonormal, est une matrice symétrique : notons $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (s_{ij})$ dans la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ on a : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ s_{ij} = \langle u(e_i)|e_j\rangle = \langle e_i|u(e_j)\rangle = \langle u(e_j)|e_i\rangle = s_{ji}$.

3.2 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Théorème 9. Spectral

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie n.
Les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles et l'endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormale.

Démonstration. Soit S la matrice (symétrique) de u dans une base orthonormale et λ une valeur propre (a priori complexe) de S, de vecteur propre $X \in \mathbb{C}^n$. Alors ${}^\top\bar{X}X = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$ et

$$\lambda\,{}^\top\bar{X}X = {}^\top\bar{X}(\lambda X) = {}^\top\bar{X}SX = {}^\top\bar{X}\,{}^\top\bar{S}X = {}^\top\overline{SX}X = \bar{\lambda}\,{}^\top\bar{X}X \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

On démontre par récurrence sur la dimension n qu'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n est diagonalisable dans une base orthonormée.

⋆ initialisation si $n = 1$: $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \lambda x$: u est diagonalisable dans la base orthonormée $\{1\}$.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie au rang n.

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $n+1$. Il possède au moins une valeurs propre λ (théorème de d'Alembert), dont on vient de prouver qu'elle était réelle. Soit x un vecteur propre associé. On a : $E = \mathbb{R}x \oplus (\mathbb{R}x)^\perp$. L'espace vectoriel $F = \mathbb{R}x)^\perp$ est de dimension n et $\forall y \in F,\ \langle u(y)|x\rangle = \langle y|u(x)\rangle = \langle y|\lambda x\rangle = \lambda\langle y|x\rangle = 0$ donc $u(y) \in F$. Ainsi F est stable par u, et la restriction $u|_F$ de u à F définit un endomorphisme symétrique, par hypothèse diagonalisable dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Par définition, $\{x, e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormale de E dans laquelle u est diagonalisable : la propriété est vraie au rang $n+1$. □

⋆ conclusion : tout endomorphisme réel symétrique d'un espace de dimension finie est diagonalisable dans une base orthonormale.

Remarque 13. Cela implique en particulier qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale pour le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^n$.

4. Formes quadratiques

4.1 Forme bilinéaire symétrique

Définition 9. Une forme bilinéaire symétrique d'un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E est une application $b : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

① b symétrique : $\forall (x,y) \in E^2,\ b(x,y) = b(y,x)$

② b bilinéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y,z) \in E^3,\ b(\lambda x + y, z) = \lambda b(x,z) + b(y,z)$ et $b(z, \lambda x + y) = \lambda b(z,x) + b(z,y)$

Exemple 6. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique particulière.

Remarque 14. On remarque que l'ensemble des formes bilinéaires symétriques d'un espace vectoriel forme lui-même un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Définition 10. On appelle *forme quadratique* φ_b associée à la forme bilinéaire symétrique b d'un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E l'application

$$\varphi_b : E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto b(x,x)$$

Exemple 7. Dans un espace vectoriel euclidien, le carré de la norme est la forme quadratique associée au produit scalaire.

Proposition 10 (Identités de polarisation). Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique b et φ sa forme quadratique associée. Alors :

⋆ $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) + 2b(x,y)$

⋆ $\forall (x,y) \in E^2,\ b(x,y) = \dfrac{1}{4}(\varphi(x+y) - \varphi(x-y))$

Démonstration. ✎ Découle de la bilinéarité et de la symétrie.

Remarque 15. La dernière identité permet de retrouver la forme bilinéaire b à partir d'une forme quadratique φ. La forme bilinéaire b est appelée la *forme polaire* de φ.

4.2 Réduction d'une forme quadratique

Définition 11. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel E de dimension finie n, muni d'une forme quadratique φ de forme polaire b. La matrice de la forme quadratique φ est

$$A = [\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & \ldots & b(e_1,e_n) \\ b(e_2,e_1) & b(e_2,e_2) & \ldots & b(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n,e_1) & b(e_n,e_2) & \ldots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Remarque 16. La matrice de b est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormale.

Remarque 17. Si $(x,y) \in E^2$ et $X = [x]_{\mathcal{B}}$ et $Y = [y]_{\mathcal{B}}$, on a $b(x,y) = {}^{\top}XAY$.
En particulier, si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale et $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers B', on a :

$$b(x,y) = {}^{\top}XAY = {}^{\top}XP\,{}^{\top}PAP\,{}^{\top}PY = {}^{\top}\tilde{X}\tilde{A}\tilde{Y}$$

où $\tilde{X} = [x]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}X = {}^{\top}PX$, $\tilde{Y} = [y]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}Y = {}^{\top}PY$ et $\tilde{A} = [\varphi]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}AP = {}^{\top}PAP$.
Ainsi, dans une base orthonormale où la forme quadratique φ est diagonale, elle s'écrit $\varphi(x) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$.

Exemple 8. ✎ Considérons la forme quadratique $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy$. Diagonaliser φ dans une base orthonormale. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la conique d'équation $2xy = 1$.

Bilan du § 22

Objectifs prioritaires

① Connaître la définition 1 du produit scalaire .... ☐ ☐ ☐
   (a) Savoir vérifier la définition du produit scalaire dans les exemples 1, 3, et 2) .... ☐ ☐ ☐
② Connaître les inégalités de Cauchy-Schwarz (proposition 1) et triangulaire (proposition 2) .... ☐ ☐ ☐
③ Connaître le théorème de Pythagore ! (proposition 3) .... ☐ ☐ ☐
④ Savoir ce qu'est une projection orthogonale, et son application aux distances (section 1.2) .... ☐ ☐ ☐
⑤ savoir ce qu'est une base orthogonale (section 1.3) .... ☐ ☐ ☐
⑥ définition et propriétés des matrices orthogonales (section 2.2 et 2.1) .... ☐ ☐ ☐
⑦ savoir ce qu'est un endomorphisme symétrique, connaître le théorème spectral (section 3) .... ☐ ☐ ☐

Objectifs secondaires

① interprétation géométrique des éléments du groupe orthogonal du plan (section 2.3) .... ☐ ☐ ☐
② interprétation géométrique des éléments du groupe orthogonal de l'espace (section 2.4) .... ☐ ☐ ☐

Approfondissement

① Connaître le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (proposition 6) .... ☐ ☐ ☐
② Définition et propriétés des formes quadratiques (section 4) .... ☐ ☐ ☐

TD du § 22

Exercice 1. Inégalité dans un espace euclidien ⋆
Soit E un espace euclidien, montrer que $\forall (x,y)\in E^2,\ 1+\|x+y\|^2 \leqslant 2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)$.

Exercice 2. Endomorphisme de même norme ⋆
Soit E un espace vectoriel euclidien et f,g deux endomorphismes de E tels que $\forall x\in E,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|$. Démontrer que, $\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle g(x)|g(y)\rangle$.

En déduire qu'un endomorphisme qui préserve la norme est un automorphisme orthogonal.

Exercice 3. Choix d'un bon produit scalaire ⋆⋆⋆
Soient $(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$. Montrer que si $x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1$, alors $(x+y+z)^2\leqslant \dfrac{11}{6}$.

Exercice 4. Interprétation géométrique de la dérivée sur $\mathrm{Vect}(1,\cos,\sin)$ ⋆⋆
Soit E le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions cosinus, sinus et la fonction constante 1.

L'espace E est muni du produit scalaire : $\forall f,g\in E,\ \langle f|g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

① Vérifier le caractère défini du produit scalaire.

② Trouver une base orthonormée directe de E.

③ Démontrer que la dérivation $E\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ f\mapsto f'$ est un endomorphisme de E.
Donner sa matrice dans la base orthonormée de la question précédente.

④ Vérifier que la dérivation est la composée d'une projection orthogonale et d'une rotation axiale.

Exercice 5. Distance euclidienne ⋆⋆
Calculer la distance ...

① entre l'origine de $\mathbb{R}^4$ et le plan passant par $A(1\,;0\,;0\,;0)$ et dirigé par $\vec{u}(1\,;1\,;0\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;2\,;2)$

Exercice 6. Distance d'une matrice à un sous-espace matriciel ⋆⋆
On munit l'espace des matrices 3×3 réelles $E=\mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A\mid B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

Déterminer la distance de la matrice $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel de E formé des matrices antisymétriques réelles : $F=\mathrm{ASym}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Géométrie dans $\mathbb{R}_2[X]$ ⋆⋆
On munit l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, $E=\mathbb{R}_2[X]$, du produit scalaire défini par $\langle P\mid Q\rangle = P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$.

① Vérifier le caractère défini positif du produit scalaire considéré.

② Calculer $||X-1||$ et $||X^2+1||$.
Sans la calculer, en déduire que la norme de $X(X+1)$ est inférieure ou égale à $\sqrt{2}+\sqrt{30}$.

③ Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel F engendré par 1 et X.
En déduire $||3X^2-6X+1||^2+||6X-1||^2$.

④ Déterminer le projeté orthogonal de $5X^2+X+2$ sur F.

Exercice 8. Étude d'une matrice orthogonale ⋆ `ATS 2003`

Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0\\1/2&1/2&-1/\sqrt{2}\\1/2&1/2&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 9. Éléments du groupe orthogonal O(3) ⋆⋆
Donner la nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est, dans une base orthonormée :

① $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}8&1&-4\\-4&4&-7\\1&8&4\end{pmatrix}$ ② $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&\sqrt{6}\\1&3&-\sqrt{6}\\-\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{pmatrix}$ ③ $-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$

Exercice 10. Transformations orthogonales de l'espace ⋆⋆
On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté par sa base canonique.

Donner la matrice dans la base canonique de la transformation suivante :

① la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par $B(1\,;0\,;0)$ et dirigée par $\vec{u}(1\,;1\,;1)$

② la projection orthogonale sur le plan passant par l'origine et dirigé par $\vec{u}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;2)$

③ la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour du vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}(1\,;1\,;1)$.

Exercice 11. Inversibilité d'une matrice symétrique ⋆

Justifier sans calcul que la matrice suivante est inversible dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$: $A = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 2-\mathrm{i} & 18 & 2 \\ -3 & 18 & 3-\mathrm{i} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Exercice 12. Endomorphisme symétrique sur les polynômes ⋆
Soit l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ (P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

① Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

② Pour tout $P \in E$, on note $T(P) = (X^2 - X)P'' + (2X-1)P'$. Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 13. Diagonalisation de forme quadratique ⋆⋆
Vérifier que q est une forme quadratique et diagonaliser q dans une base orthonormée adaptée.

① $q(x\,;y\,;z) = \dfrac{x^2}{2} + y^2 + \dfrac{z^2}{2} + xz$.