§ 21 : Séries de Fourier

1. Produit scalaire

1.1 Définition abstraite du produit scalaire

Définition 1. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel. Un *produit scalaire* sur E est une application $\langle \cdot\,;\cdot \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
⋆ bilinéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v,w) \in E^3,\ \langle \lambda u + v\,; w\rangle = \lambda \langle u\,; w\rangle + \langle v\,; w\rangle$ et $\langle w\,; \lambda u + v\rangle = \lambda \langle w\,; u\rangle + \langle w\,; v\rangle$.
⋆ symétrie : $\forall (u,v) \in E^2,\ \langle u\,; v\rangle = \langle v\,; u\rangle$.
⋆ caractère défini positif : $\langle u\,; u\rangle \geqslant 0$ avec $\langle u\,; u\rangle = 0$ si, et seulement si, $u = 0$.
Si $u \in E$, le nombre $\|u\| = \sqrt{\langle u\,; u\rangle}$ est la *norme* du vecteur u.

Exemple 1. ✎ Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \cdot\,;\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \big(u = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,; v = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\big) \mapsto \langle u\,; v\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_i v_i$$

Exemple 2. ✎ Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π–périodiques :

$$\langle \cdot\,;\cdot \rangle : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R},\ \big(f\,; g\big) \mapsto \langle f\,; g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Calculer $\|\cos\|$.

1.2 Projection orthogonale, théorème de Pythagore

Définition 2. Soit $(E, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Les vecteurs u et v de E sont *orthogonaux* si et seulement si $\langle u\,; v\rangle = 0$.

Une famille de vecteurs est *orthogonale* si et seulement si elle est formée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs est *orthonormale* si et seulement si elle est formée de vecteurs unitaires (de norme 1) deux à deux orthogonaux.

Exemple 3. Montrer qu'une famille orthogonale est libre.

Exemple 4. On considère l'espace $\mathcal{C}$ défini dans l'exemple 2. Considérons les fonctions définies par

$$C_0 = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ C_k : t \mapsto \cos(kt) \text{ et } S_k : t \mapsto \sin(kt)$$

Vérifier que $\{C,\ C_k,\ S_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille orthogonale. Est-elle orthonormale ?

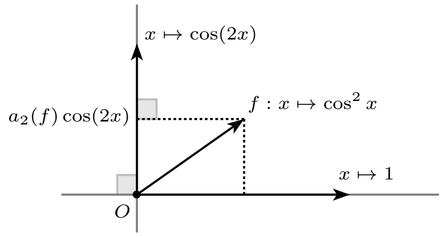
Soit $f \in \mathrm{Vect}(C_0, C_1, \ldots, C_n, S_1, \ldots, S_n) : f(x) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big)$.

Exprimer les coefficients $a_0(f), a_k(f), b_k(f)$ en fonction de f et k à l'aide du produit scalaire.

Définition 3. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et u un vecteur non nul de E.

La projection orthogonale d'un vecteur v sur la droite vectorielle $\mathbb{R}u$ est le vecteur $v = \dfrac{\langle u\,; v\rangle}{\|u\|}u$.

Exemple 5. On utilise les mêmes notations que dans l'exemple 4.
Calculer la projection orthogonale de $\cos^2$ sur les droites vectorielles $\mathbb{R}C$ et $\mathbb{R}C_2$.
Vérifier que $\|\cos^2(x)\|^2 = \left\|\frac{1}{2}\cos(2x)\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}\right\|^2$



Proposition 1. Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Alors : $u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Démonstration. ✎ Repose sur la bilinéarité du produit scalaire. □

2. Série de Fourier d'une fonction

2.1 Coefficients de Fourier

Notation 1. Dans tout le chapitre, $T > 0$ désignera la période d'une fonction et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation associée.

Définition 4. Soit f une fonction T–périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les *coefficients de Fourier* de la fonction f sont les nombres :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 1. Dans le cas fréquent où $T = 2\pi$, on a $\omega = 1$ et pour f continue par morceaux et 2π–périodique :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 2. l'intégrale d'une fonction T–périodique est la même sur tout intervalle de longueur T. Ainsi, on peut remplacer les intervalles d'intégrations dans la définition par n'importe quel intervalle de longueur T. Par exemple, pour une fonction 2π–périodique, on a :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 3. l'intégrale d'une fonction impaire sur $[-T/2\,;T/2]$ étant nulle, si f est T–périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et

- ⋆ si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0$.
- ⋆ si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$.

Exemple 6 (Monômes trigonométriques). Calculer les coefficients de Fourier d'une fonction constante C.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k(t) = \cos(\omega k t)$ et $S_k(t) = \sin(\omega k t)$. Calculer les coefficients de Fourier de C_k, ceux de S_k.

Exemple 7 (Signal carré). Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels, 2π–périodique, impaire et telle que $\forall x \in\,]0\,;\pi[,\ f(x) = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n\pi) = 0$. Représenter f et calculer ses coefficients de Fourier.

Remarque 4. Il arrive qu'il soit plus simple de calculer

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

et d'en déduire : $a_0(f) = c_0(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = \mathrm{i}\big(c_{-n}(f) - c_n(f)\big)$.

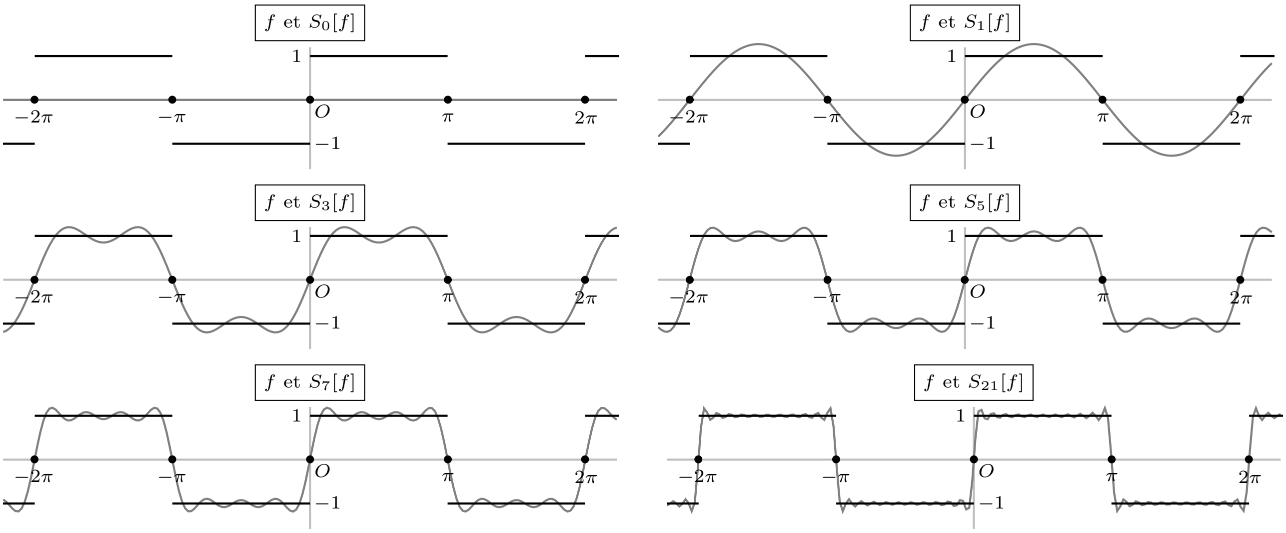
2.2 Série de Fourier d'une fonction

Définition 5. Soit f une fonction T–périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La *série de Fourier* de la fonction f évaluée en $x \in \mathbb{R}$ est :

$$S[f](x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\big)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit aussi la somme partielle $S_n[f](x) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \big(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\big)$.

Exemple 8. On a représenté ici la fonction f de l'exemple 7 et les premiers termes de la suite des sommes partielles de sa série de Fourier :



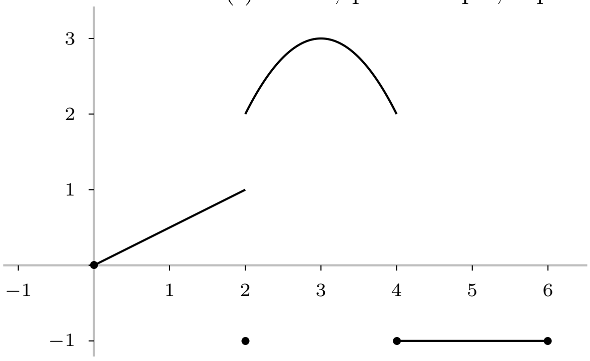
3. Convergence ponctuelle d'une série de Fourier

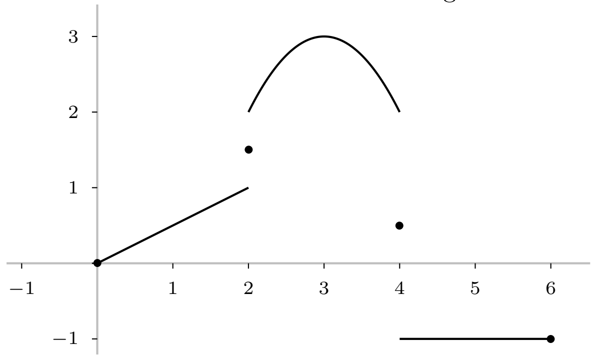
3.1 Théorème de Dirichlet

> Définition 6. Soit u une fonction continue par morceaux sur un intervalle ouvert I. La régularisée de u est la fonction $\tilde{u}$ définie sur I par :
>
> $$\forall x \in I,\ \tilde{u}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^+} f(t) + \lim_{t\to x^-} f(t)\right) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

Remarque 5. En particulier, si u est continue sur I, on a $\tilde{u} = u$.

En un point x de discontinuité, la valeur de la régularisée $\tilde{u}(x)$ est la moyenne de la limite à gauche et la limite à droite en x de $u(t)$. On a, par exemple, représenté à gauche une fonction u et à droite sa régularisée $\tilde{u}$:





Théorème 2. Dirichlet

Soit f une fonction T–périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La série de Fourier de f converge ponctuellement vers la régularisée de f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S[f](x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^+} f(t) + \lim_{t\to x^-} f(t)\right) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

Remarque 6. Ainsi, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue en x, $S[f](x) = f(x)$. En revanche, si f n'est pas continue en x, il se peut que f diffère de sa série de Fourier : $S[f](x) \neq f(x)$.

Démonstration. Quitte à effectuer un changement de variable, on suppose pour simplifier que $T = 2\pi$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to x^+} f(t) + \lim\limits_{t\to x^-} f(t)\right) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on considère le noyau de Dirichlet $D_N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \cos(kx)$.

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que D_n est paire, 2π–périodique et que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \pi$.

② Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} mD_n(t)\,\mathrm{d}t = S_n(x) - m$

③ En posant $u = x - t$, vérifier que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \big(f(x+u)+f(x-u)\big)D_n(u)\,\mathrm{d}u$

④ En déduire : $S_n(x) - m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \big(f(x+t)-f(x^+)\big)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(f(x-t)-f(x^-)\big)D_n(t)\,\mathrm{d}t$
On note respectivement A_n et B_n la première et la deuxième intégrale du second membre.

⑤ Montrer que $\forall t \in]-\pi\,;\pi[,\ D_n(t) = \dfrac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)}$. En déduire : $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\big((n+1/2)t\big)\,\mathrm{d}t$ où φ est continue par morceaux sur $]0\,;\pi]$ et se prolonge par continuité en 0.

⑥ Montrer en intégrant par parties que A_n tend vers 0. On peut montrer de même $B_n \to 0$. Conclure. □

Exemple 9. Avec la fonction f de l'exemple 7, montrer : $S[f] = f$.

3.2 Applications

Méthode 1.

On peut obtenir des valeurs remarquables de séries numériques en évaluant des séries de Fourier en des valeurs de x pertinentes, et en utilisant le théorème 2 de Dirichlet.

Exemple 10. À l'aide de la série de l'exemple 7, établir la convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Remarque 7. On admet que sous les hypothèse du théorème de Dirichlet (f fonction T–périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), l'intégrale de a à b d'une fonction f s'obtient en intégrant terme à terme sa série de Fourier.

4. Convergence en moyenne quadratique d'une série de Fourier

4.1 Théorème de Parseval

Théorème 3. Parseval

Soit f une fonction T–périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La série de terme général $|a_n(f)|^2$ et celle de terme général $|b_n(f)|^2$ sont convergentes et on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\big)$$

Remarque 8 (Interprétation géométrique). Il s'agit d'une généralisation du théorème de Pythagore. On montre que l'application définie dans l'exemple 2 est aussi un produit scalaire de l'espace contenant toute fonction continue par morceaux, 2π–périodique et égale à sa régularisée.

L'égalité de Parseval s'interprète comme une généralisation du théorème de Pythagore.

Exemple 11. À partir de la série de l'exemple 7, calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Bilan du § 21

Objectifs prioritaires

① connaître par cœur les formules des coefficients de Fourier (définition 2 et remarque 1) .... ☐ ☐ ☐
② invariance de l'intégration sur une période d'une fonction périodique (remarque 2) .... ☐ ☐ ☐
③ connaître l'impacte de la parité sur les coefficients de Fourier (remarque 3) .... ☐ ☐ ☐
④ connaître (hypothèses comprises) le théorème 2 de Dirichlet .... ☐ ☐ ☐
⑤ connaître (hypothèses comprises) le théorème 3 de Parseval .... ☐ ☐ ☐
⑥ savoir utiliser ses théorèmes pour calculer des séries numériques (exemples 10 et 11) .... ☐ ☐ ☐

Objectifs secondaires

① connaître les hypothèses d'intégration terme à terme d'une série de Fourier (remarque 7) ..... ☐ ☐ ☐
② comprendre la notion de produit scalaire (section 1.1, sera approfondie au chapitre §22) ...... ☐ ☐ ☐

Approfondissement

① comprendre la démonstration du théorème 2 de Dirichlet .... ☐ ☐ ☐

TD du § 21

Exercice 1. Coefficients de Fourier ⋆
Calculer les coefficients de Fourier de la fonction suivante :

① $f : x \mapsto \sin^2(x)$ ② $f : x \mapsto |\sin x|$ ③ $f : x \mapsto \min(\cos(2x), \sin(2x))$

④ f 2–périodique, paire, affine sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$

⑤ f 2-périodique, affine sur $[0\,;1]$, telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \in]1\,;2]$.

Exercice 2. Série de Fourier d'un signal rectangulaire ⋆ ATS 2013
On considère la fonction 2π–périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$

Représenter f, et donner sa série de Fourier. La série de Fourier est-elle égale à f ? Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Exercice 3. Série de Fourier de la valeur absolue ⋆ ATS 2013
Donner le développement en série de Fourier de la fonction $f : [-2\,;2] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$.

Exercice 4. Série de Fourier d'un trinôme ⋆⋆ ATS 2013
Soit la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2 - \pi^2$ sur $[-\pi\,;\pi]$.

① Représenter f.

② Déterminer sa série de Fourier.

③ Calculer la somme des séries $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5. Série de Fourier et cosinus hyperbolique ⋆
Soient un réel $\lambda > 0$ f et la fonction 2π–périodique définie par $\forall x \in]-\pi\,;\pi],\ f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

① Représenter graphiquement f.

② Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

③ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + n^2}$,

④ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + n^2)^2}$.

Exercice 6. Inégalité de Wirtinger ⋆
Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, 2π–périodique.

① Exprimer les coefficients de Fourier de f en fonction de ceux de sa dérivée f'.

② Montrer que si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} \big(f(t)'\big)^2\,\mathrm{d}t$.

③ Étudier les cas d'égalité.

Exercice 7. Convergence absolue de la série de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^2$ ⋆
Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, 2π–périodique.

On note $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ les coefficients de Fourier de f des termes en cosinus de la série.

① Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \dfrac{M}{n^2}$.
Majorer de même les coefficients de Fourier des termes en sinus de la série de Fourier de f.

② Montrer que pour tout x réel, la série de Fourier de f évaluée en x converge absolument.

Exercice 8. Somme des n-ièmes coefficients de Fourier, divisés par n ⋆
Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π–périodique.

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement (b_n)) les coefficients de Fourier en cosinus (respectivement en sinus) de sa série de Fourier.

Démontrer que les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|b_n|}{n}$ convergent.