§ 16 : Séries numériques

1. Définition et exemples

1.1 Notion de série

Définition 1 (Série). Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. La *série* de terme général u_n est la suite (S_n) définie par :

$$\forall N \geqslant n_0,\ s_n = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

Le terme S_n est la *somme partielle d'indice* n de la série. La série elle même est notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

Exemple 1. Les séries qui suivent ont une importance particulière :

① la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, est la *série géométrique* de raison α.

② la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique*.

③ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est une *série de Riemann*.

1.2 Convergence et divergence de séries

Définition 2. La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est *convergente* si et seulement si la suite des sommes partielles converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la *somme* de la série et notée

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Le *reste* d'une série convergente est la suite de terme général $(R_n) = (S - S_n)$.

Si la série ne converge pas, elle est dite *divergente*.

Exemple 2 (Séries géométrique). ✎ Calculer les sommes partielles de la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n$.

Montrer que la série géométrique converge si et seulement si $|\alpha| < 1$, et qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$.

Exemple 3. ✎ Calculer les sommes partielles de la série de terme général n, et vérifier qu'elle diverge.

Proposition 1 (Séries et opérations). Muni des opérations d'addition et de multiplication externe des suites, l'ensemble des séries convergentes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Démonstration. ✎ On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites, on utilise la linéarité de la somme et de la limite. □

Exemple 4. ✎ Montrer par un exemple que la somme de deux séries divergentes peu en revanche converger.

Remarque 1. Les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant m_0} u_n$ sont de même nature : leurs sommes partielles diffèrent d'une constante fixée $C = u_{n_0} + \cdots + u_{m_0-1}$ (si $m_0 > n_0$).

Remarque 2. Une série à termes complexes $\sum a_n + \mathrm{i} b_n$ est convergente si et seulement si les séries réelles des parties réelle et imaginaire convergent. On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mathrm{i} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

1.3 Séries de Riemann

Proposition 2. Séries de Riemann

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$ (et divergente si $\alpha \leqslant 1$).

Démonstration. ✎ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que :

① Si $\alpha \leqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 1$. En déduire $S_n \geqslant n$ et que la série diverge.

② Si $\alpha > 0$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$.

③ En déduire : $S_{n+1} - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant S_n$, puis que (S_n) diverge lorsque $0 < \alpha < 1$ ou $\alpha = 1$.

④ Si $\alpha > 1$, montrer que (S_n) est croissante et majorée et conclure. □

1.4 Séries télescopiques

Proposition 3. Lien entre suite et série

La suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} a_{n+1} - a_n$ converge.

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{n+1} - a_n = (\lim a_n) - a_{n_0}$. (une série sous la forme $\sum a_{n+1} - a_n$ est dite *télescopique*).

Démonstration. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} a_{n+1} - a_n = a_{N+1} - a_0$. □

Exemple 5. ✎ Discuter la convergence, et, le cas échéant calculer la somme de :

① $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln(n+1) - \ln(n)$ ② $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ ③ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$

1.5 Séries alternées

Proposition 4. Critère spécial de Leibniz

Si (u_n) est une suite telle que :
⋆ (u_n) est *alternée* : $(-1)^n u_n$ est de signe constant,
⋆ $(|u_n|)$ est décroissante,
⋆ $u_n \to 0$,
alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifiant les trois critères, $p_n = \sum_{k=n_0}^{2n} u_k$ et $i_n = \sum_{k=n_0}^{2n+1} u_k$ les sommes partielles d'indices pairs et impairs. Pour tout n, $p_{n+1} - p_n = u_{2n+2} + u_{n+1}$ est du signe de u_{2n+1} car $|u_{2n+2}| < |u_{2n+1}|$ et de même $i_{n+1} - i_n = u_{2n+3} + u_{2n+2}$ est du signe de u_{2n+2}. : comme (u_n) est alternée, (p_n) et (i_n) sont de monotonie contraire. De plus, $i_n - p_n = u_{2n+1} \longrightarrow 0$, donc les suites (p_n) et (i_n) sont adjacentes et convergent vers une limite commune S. Ainsi, la série est convergente de somme S. □

Exemple 6. Établir la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$.

Remarque 3. La démonstration prouve en particulier que la somme S d'une série alternée est encadrée par deux termes consécutifs de la série et par conséquent, que le reste d'ordre $S - S_n$ est majoré par $|u_{n+1}|$.

2. Séries à termes positifs

Définition 3. On dit que la série $\sum u_n$ est à *termes positifs* (à partir d'un rang n_0) si $u_n \geqslant 0$ (pour $n \geqslant n_0$).

Remarque 4. Par définition, les sommes partielles d'une série à termes positif $\sum u_n$ forment une suite croissante. Ainsi, une série à termes positifs est soit :
⋆ convergente vers une limite ℓ (si elle est majorée).
⋆ divergente vers $+\infty$ (si elle n'est pas majorée).

2.1 Comparaisons de séries

Proposition 5. Comparaisons de séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dont les termes vérifient à partir d'un rang n_0 : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :
⋆ (u_n) converge si (v_n) converge.
⋆ (v_n) diverge si (u_n) diverge.

Démonstration. On obtient un encadrement des sommes partielles et on utilise le théorème d'encadrement.

Remarque 5. Pour montrer l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, il suffit que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Exemple 7. Ce critère est souvent utilisé en lien avec les séries géométriques ou les séries de Riemann.

Étudier la convergence des séries suivantes (et calculer la seconde en obtenant une relation de récurrence entre ses sommes partielles) :

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}$ ② $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$

2.2 Séries et équivalents

Proposition 6. Séries positives de termes équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang.
Si $u_n \sim v_n$ alors les deux séries sont de même nature.

Démonstration. L'hypothèse $u_n \sim v_n$ se traduit par $u_n - v_n = \mathrm{o}(u_n)$. Par l'absurde, supposons que les deux suites sont de nature différente, disons (u_n) diverge (vers l'infini, car c'est une série à termes positifs) et (v_n) converge, $u_n - v_n \sim u_n$: contradiction. □

Exemple 8. Étudier la nature des séries :

① $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\frac{1}{n}$ ② $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ ③ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2n^2}} - \mathrm{ch}\,\frac{1}{n}\right)$

2.3 Convergence absolue

Définition 4. Une série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si $|u_n|$ converge.
La série $\sum u_n$ est dite *semi-convergente* si elle converge sans être absolument convergente.

Exemple 9. Donner un exemple de série absolument convergente et un exemple de série semi-convergente.

Proposition 7.

Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, notons S la somme de $\sum |u_n|$. On définit pour tout n : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Les séries de termes généraux u_n^+ et u_n^- sont à termes positifs et leurs sommes partielles sont majorées par S, donc elles convergent. Ainsi, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ est le terme général d'une série convergente. □

EXEMPLE 10. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin(n^2)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3. Méthodes d'étude

3.1 Autres critères

PROPOSITION 8. CRITÈRE DE DIVERGENCE

Si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle *diverge grossièrement*.

Démonstration. Les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant n_0} \ell$ forment une suite arithmétique de raison ℓ, qui diverge dès que $\ell \neq 0$. Si $u_n \sim \ell$ la série de terme général u_n est donc divergente. □

REMARQUE 6. Les séries de Riemann pour $\alpha \in]0;1]$, comme la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, montrent que la réciproque est fausse.

PROPOSITION 9. CRITÈRE DE D'ALEMBERT

Si les termes de la série $\sum u_n$ sont non nuls et si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:
- ⋆ lorsque $0 \leqslant \ell < 1$: $\sum u_n$ converge absolument.
- ⋆ lorsque $\ell > 1$: $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- ⋆ lorsque $\ell = 1$: le critère ne permet pas de conclure.

Démonstration. Si $\ell \in [0;1[$, il existe un réel r tel que $\ell < r < 1$. À partir d'un certain rang n_0, $|u_{n+1}| \leqslant r|u_n|$, donc par récurrence : $|u_n| \leqslant Cr^{n-n_0}$ où $C = \max_{n\leqslant n_0} |u_n|$. Par la proposition de comparaison 5, et le résultat sur les suites géométriques, $\sum u_n$ converge absolument.

Le cas $\ell > 1$ se traite en appliquant ce qui précède à $v_n = \dfrac{1}{u_n}\cdot$ □

EXEMPLE 11. ✎ Convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!}\cdot$

PROPOSITION 10. COMPARAISON AVEC UNE INTÉGRALE

Si f est une fonction continue et positive sur $[n_0\,;+\infty[$. Alors :
$\displaystyle\sum f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

Démonstration. Sera vu dans le chapitre §18 sur les intégrales généralisées. On a implicitement utilisé ce critère pour l'étude des séries de Riemann. □

3.2 Méthodes de calcul

MÉTHODE 1.

On dispose des méthodes suivantes pour obtenir une somme :

① utiliser les sommes géométriques.

② obtenir une relation de récurrence entre les sommes partielles, puis une équation sur la somme.

③ Utiliser les sommes télescopiques.

Bilan du § 16

Objectifs prioritaires

① connaître la définition 1 d'une série, de sa somme, des sommes partielles (section 1.1) .... ☐ ☐ ☐
② connaître la définition d'une série convergente, divergente .... ☐ ☐ ☐
③ connaître la définition et la nature d'une série géométrique : exemple 2 .... ☐ ☐ ☐
④ connaître la définition et la nature d'une série de Riemann : section 1.3 .... ☐ ☐ ☐
⑤ connaître le critère de convergence d'une série télescopique, savoir la calculer (section 1.4) .... ☐ ☐ ☐
⑥ connaître le critère de Leibniz des séries alternées : section 1.5 .... ☐ ☐ ☐
⑦ connaître le critère de comparaison des séries à termes positifs : section 2.1 .... ☐ ☐ ☐
⑧ connaître le critère par équivalence des séries à termes positifs : section 2.2 .... ☐ ☐ ☐
⑨ connaître la notion de convergence absolue 2.3 .... ☐ ☐ ☐
⑩ connaître le critère de divergence grossière : proposition 8 .... ☐ ☐ ☐
⑪ connaître le critère de d'Alembert : proposition 9 .... ☐ ☐ ☐
⑫ connaître les méthodes de calcul : section 3.2 et exercices 2, 4 .... ☐ ☐ ☐
⑬ savoir utiliser les critères pour établir des convergences (exercices 2, 3) .... ☐ ☐ ☐

Objectifs secondaires

① Connaître le critère de comparaison avec une intégrale : 10 .... ☐ ☐ ☐
② Comprendre l'étude de la nature des séries de Riemann (section 1.3) .... ☐ ☐ ☐

Approfondissement

① connaître le résultat culturel de la formule de Stirling de l'exercice 5 .... ☐ ☐ ☐
② comprendre la démonstration du critère de Leibniz (section 1.5) .... ☐ ☐ ☐

TD du § 16

Exercice 1. Nature de séries numériques ⋆⋆
Étudier la convergence de la série :

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ ③ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.
④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$ ⑤ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n}\right)^n$ ⑥ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ⑦ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ⑧ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

Exercice 2. Calcul de séries numériques ⋆⋆
Établir la convergence et calculer la somme de la série numérique :

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$. ② $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ③ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ ④ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

Exercice 3. Nature d'une série ⋆⋆ ATS 2011
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 4. Somme d'une série ⋆⋆ ATS 2010
Calculer la somme de la série suivante : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5. Formule de Stirling ⋆⋆
On cherche un équivalent de $n!$. On suppose connue la formule de Wallis (établie à partir de l'intégrale de Wallis) :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$.

① Montrer que la série de terme général u_n converge.
② En déduire que la suite (a_n) converge vers un réel strictement positif noté L.
③ Calculer L en utilisant la formule de Wallis, à partir de l'expression : $\dfrac{a_n^2}{a_{2n}}$.
④ En déduire la formule de Stirling : $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$.

Exercice 6. Transformation et critère d'Abel ⋆⋆
On souhaite démontrer le critère d'Abel :
Soit la série de terme général $u_n = a_n b_n$ où $(b_n)_n$ décroît vers 0, et les sommes partielles de la série de terme général (a_n) soient bornées ($\exists A > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} : A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant A$). Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge.

① Montrer l'égalité de la transformation d'Abel (une intégration par parties pour les sommes) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_0 b_1.$$

② Montrer que, sous les hypothèses du critère d'Abel, la série de terme général $A_k(b_k - b_{k+1})$ est absolument convergente. En déduire que la série de terme général u_k converge.
③ Déduire du critère d'Abel le critère de Leibniz : la série de terme général $(-1)^n|u_n|$ converge lorsque la suite $(|u_n|)_n$ décroît et converge vers 0.
④ Démontrer le théorème d'Abel : si une série de terme général $u_n \in \mathbb{C}$ converge, alors la série de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
⑤ Montrer que la série de terme général $\dfrac{\sin n\theta}{n}$, où $0 < \theta < \pi$, est une série convergente.