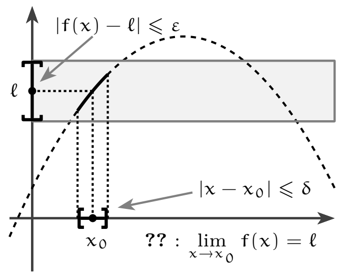
§ 7 : Analyse asymptotique

1. Notion de limite

1.1 Limite en un réel



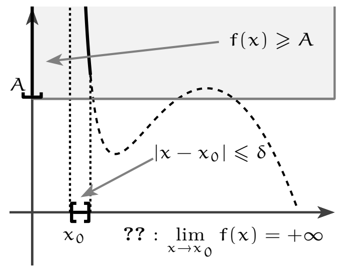
DÉFINITION 1. Soient x_0 et ℓ réels. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur ensemble I, qui rencontre tout intervalle ouvert contenant x_0.

① $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

② $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant A.$$



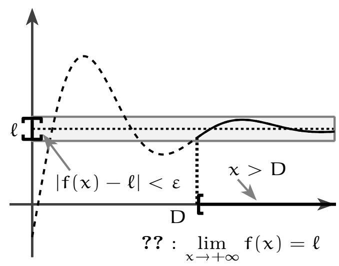
③ $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$, si et seulement si $-f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.

REMARQUE 1. En remplaçant l'intervalle I par $I \cap]x_0\,;+\infty[$ (respectivement, par $I \cap]-\infty\,;x_0[$) , on obtient la limite à droite : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (respectivement, la limite à gauche : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$).

EXEMPLE 1. ✎ Pour appliquer directement la définition ??, il faut expliquer comment choisir δ en fonction de ε ou A pour que l'implication qui suit soit vérifiée. Démontrer que :

① $x \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$ ② $c \xrightarrow[x \to x_0]{} c$ ③ $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ ④ $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$

1.2 Limite en l'infini



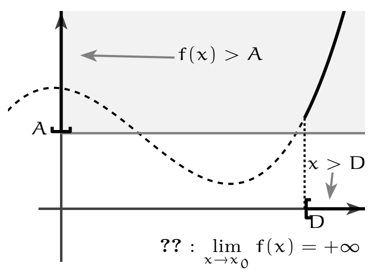
DÉFINITION 2. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un ensemble I non majoré. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

① $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists D > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant D \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

② $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, si et seulement si :

$$\forall A > 0,\ \exists D > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant D \implies f(x) \geqslant A.$$



③ $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, si et seulement si $-f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

REMARQUE 2. On définit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ par $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = \ell$.

REMARQUE 3 (Fonctions à valeurs complexes). Le point ?? de la définition ?? et le point ?? de la définition ?? s'étendent au cas où la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

EXEMPLE 2. ✎ Vérifier avec les définitions : ① $x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ② $c \xrightarrow[x \to +\infty]{} c$ ③ $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

1.3 Opérations et limites

PROPOSITION 1. Soient u et v deux fonctions définie sur un ensemble I et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On a :

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	⚠ ? ⚠

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	⚠ ? ⚠

$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $v(x)>0$	0 avec $v(x)<0$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{v(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Démonstration. On traite $\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$ dans le cas où $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

On souhaite prouver que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I : |x-a| \leqslant \delta \implies |v(x)u(x) - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon$

On remarque que $|u(x)v(x) - \ell\ell'| = |u(x)v(x) - u(x)\ell' + u(x)\ell' - \ell\ell'| \leqslant |u(x)| \cdot |v(x) - \ell'| + |\ell'| \cdot |u(x) - \ell|$

Comme $u(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a, $\exists \delta_1 > 0,\ \forall x \in J,\ |x-a| \leqslant \delta_1 \implies |u(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \times \frac{1}{2(|\ell'|+1)}$.

Dans ce cas, $|u(x)| = |u(x) - \ell + \ell| \leqslant \varepsilon \times \frac{1}{2(\ell'|+1)} + |\ell'| = M$.

Comme $v(x)$ tend vers ℓ' lorsque x tend vers a, $\exists \delta_2 > 0,\ \forall x \in J : |x-a| \leqslant \delta_2 \implies |v(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \times \frac{1}{2M}$.

Finalement, en choisissant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, et en exploitant la majoration remarquée plus haut :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \implies |u(x)v(x) - \ell\ell'| \leqslant M \cdot \varepsilon \times \frac{1}{2M} + |\ell'| \cdot \varepsilon \times \frac{1}{1+|\ell'|} \leqslant \varepsilon.$ □

EXEMPLE 3. ✎ Certains quotients nécessitent une étude de signe : calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2-x}{x^2-3x+2}$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$.

REMARQUE 4. Les *formes indéterminées* sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0, ...

Ces situations exigent que l'on change l'écriture de la fonction, par exemple avec les techniques du paragraphe **??**, ou que l'on utilise les méthodes de comparaisons du paragraphe **??**.

PROPOSITION 2. LIMITES DE FONCTIONS COMPOSÉES

Soient $a, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et I, J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soient $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = \lim\limits_{y\to \ell} v(y)$

Démonstration. Notons $\ell' = \lim\limits_{y\to \ell} v(y)$. On traite le cas où a, ℓ et ℓ' sont réels.

On doit prouver que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I : |x-a| \leqslant \delta \implies |v(u(x)) - \ell'| \leqslant \varepsilon$

Comme $v(y)$ tend vers ℓ' lorsque y tend vers ℓ, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \forall x \in J : |y-\ell| \leqslant \delta' \implies |v(y) - \ell'| \leqslant \varepsilon$.

Comme $u(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a, $\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \implies |u(x) - \ell| \leqslant \delta'$.

Finalement : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I : |x-a| \leqslant \delta \implies |u(x) - \ell| \leqslant \delta'$, donc $|v(u(x)) - \ell'| \leqslant \varepsilon$.

Les cas où il y a des infinis parmi a, ℓ et ℓ' se traitent de manière semblable. □

EXEMPLE 4. ✎ Calculer : ① $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(\mathrm{ch}(x))$ ② $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{i\arctan(x)}$.

EXEMPLE 5. ✎ Soient les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(2n\pi)$ et $v_n = \cos(\pi + 2n\pi)$. Simplifier ces suites et déterminer leurs limites. Démontrer par l'absurde que $\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, à partir de la proposition **??**.

1.4 Techniques pour lever les formes indéterminées

MÉTHODE 1. Racines et quantité conjuguée

Pour les limites faisant intervenir des radicaux, on peut essayer de multiplier le numérateur et le dénominateur par *la quantité conjuguée* avec comme idée d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
⚠ Ne pas utiliser cette méthode en l'absence de forme indéterminée, sous peine d'en faire apparaître !

EXEMPLE 6. ✎ Calculer : ① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$ ③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

MÉTHODE 2. Exposants variables

Lorsque on a un exposant variable (pour autre chose que e), on utilise $a^b = e^{b\ln(a)}$.

EXEMPLE 7. ✎ Calculer les limites suivantes : ① $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{x}}$ ② $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$ ③ $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{\ln(x)^2}}$

MÉTHODE 3. Se ramener à une limite en zéro

Il est parfois plus facile de traiter les problèmes où la variable x tend vers 0. On passe de $x\to a$ à $h\to 0$ en posant $h = x-a$ et en exprimant tout en fonction de h.

EXEMPLE 8. ✎ Calculer $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$.

2. Méthodes de comparaison

2.1 Inégalités et limites

REMARQUE 5. Si u et v sont deux fonctions définies sur un ensemble I, telles que sur I on a $u(x) \leqslant v(x)$. et $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, si u et v admettent des limites (finies ou infinies) en a, alors : $\lim\limits_{x\to a} u(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} v(x)$.

⚠ Seules les inégalités larges ($\leqslant, \geqslant$), et pas les inégalités strictes ($<, >$), passent à la limite.

THÉORÈME 3. D'ENCADREMENT

Soient u,v et w trois fonctions définies sur un ensemble I et $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.
① si pour tout $x \in I$, $v(x) \leqslant u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$.
② si pour tout $x \in I$, $v(x) \geqslant u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$.
③ si pour tout $x \in I$, $v(x) \leqslant u(x) \leqslant w(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \lim\limits_{x\to a} w(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell$.

Démonstration. ✎ utilise les définitions □

2.2 Relation de négligeabilité

DÉFINITION 3. Soit u et v deux fonctions définies sur un ensemble I, $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ avec $v(x) \neq 0$ pour $x \in I - \{a\}$. On dit que u est négligeable par rapport à v au voisinage de a si et seulement si

$$\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

On note alors : $u(x) = o_a(v(x))$: ce qui se lit u est « un petit o » de v au voisinage de a.

EXEMPLE 9. Que dire de la fonction u lorsque : ① $u(x) = o_3(1)$ ② $u(x) = \ell + o_{-\infty}(1)$ ③ $u(x) = o_0(x)$?

EXEMPLE 10. Démontrer : $x^4 - x = x^4 + o_{+\infty}(x^4)$ et $x^4 - x = -x + o_0(x)$. Interpréter en terme de limites.

PROPOSITION 4 (Croissances comparées). Soient α et β deux réels. Si

① $\alpha > 0$, $x^\beta = o_{+\infty}(e^{\alpha x})$ ② $\beta > 0$, $(\ln x)^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ ③ $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ ④ $\alpha < \beta$, $x^\beta = o_0(x^\alpha)$

Démonstration. ✎ On reformule des théorèmes de croissances comparées du §2 « Fonctions usuelles ». □

PROPOSITION 5. NÉGLIGEABILITÉ ET OPÉRATIONS

Soient u, v et w des fonctions définies sur I, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec $v(x) \neq 0$ et $w(x) \neq 0$ pour $x \in I \setminus \{a\}$.

① si $u(x) = o_a(v(x))$, alors $\lambda \cdot u(x) = o_a(v(x))$.

② si $u(x) = o_a(v(x))$, alors $u(x)w(x) = o_a(v(x)w(x))$ et $u(x)/w(x) = o_a(u(x)/w(x))$.

③ si $u(x) = o_a(v(x))$ et $v(x) = o_a(w(x))$, alors $u(x) = o_a(w(x))$.

④ si $u(x) = o_a(v(x))$ et $w(x) = o_a(v(x))$, alors $u(x) + v(x) = o_a(v(x))$

Démonstration. ✎ Ce sont des conséquences de la définition ?? □

EXEMPLE 11. ✎ Démontrer que $e^{-x} = o_{+\infty}(x^4)$, puis que $\ln(x) - 2x^2 + e^{-x} = o_{+\infty}(x^4)$.

2.3 Relation d'équivalence

DÉFINITION 4. Soient u et v deux fonctions définies sur un ensemble I, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que $v(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{a\}$. On dit que $u(x)$ et $v(x)$ sont équivalents au voisinage de a, si et seulement si :

$$\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

On abrège cela ainsi : $u(x) \underset{a}{\sim} v(x)$. ⚠ On ne peut pas écrire $u(x) \underset{a}{\sim} 0$!

REMARQUE 6. Il en découle immédiatement que :

- ⋆ si $u(x) \underset{a}{\sim} v(x)$ et que $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \ell$.
- ⋆ si $u(x) \underset{a}{\sim} v(x)$ alors u et v sont de même signe au voisinage de a.
- ⋆ $u = v + o_a(v) \iff u \underset{a}{\sim} v$

EXEMPLE 12. Donner des équivalents simples en 0 et $+\infty$, puis la limite en ces valeurs, de $x^4 - x - 2\sqrt{x}$.
Trouver deux fonctions u et v telles que $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \lim\limits_{x \to 0} v(x)$ mais qui ne sont pas équivalentes en 0 !

PROPOSITION 6. OPÉRATIONS SUR LES ÉQUIVALENTS

Soient u, v, f, g des fonctions définies sur un ensemble I, et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

① $u \underset{a}{\sim} v$ et $f \underset{a}{\sim} g \implies uf \underset{a}{\sim} vg$

② $u \underset{a}{\sim} v$ et $f \underset{a}{\sim} g \implies \frac{f}{u} \underset{a}{\sim} \frac{g}{v}$

③ $u \underset{a}{\sim} v \implies u^\alpha \underset{a}{\sim} v^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$ ou $u, v > 0$)

Démonstration. Repose sur la définition ?? des équivalents. □

REMARQUE 7. ⚠ On ne peut, en général, ajouter, soustraire ou composer les équivalents.

3. Développements limités

3.1 Définition du développement limité d'une fonction

Définition 5. Soit I un intervalle contenant 0, ou dont une borne contient 0. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$.

On dit que la fonction f admet un *développement limité d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *en* 0 si et seulement s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, tel que

$$\forall x \in I,\ f(x) = P(x) + o_0(x^n).$$

Le polynôme P est la *partie principale* du développement limité à l'ordre n, l'égalité ci-dessus est le développement limité de f à l'ordre n. La fonction $o_0(x^n)$ est le *reste* du développement limité.

Remarque 8. De manière équivalente, dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et des coefficients réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ et } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

La partie principale donne une approximation de f locale, au voisinage de 0, par un polynôme. Elle ne donne aucune indication sur le comportement global de f.

Exemple 13. ✎ Rappeler la valeur, pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, de $1 + x + \dots + x^n$.

En déduire l'existence et la partie principale du développement limité en 0 à l'ordre n de $\dfrac{1}{1-x}$.

Remarque 9. À partir d'un développement limité d'ordre n, on obtient un développement d'ordre $p < n$ par troncature au degré p de la partie principale : $1 - 2x + 3x^2 + 6x^3 = 1 - 2x + o_0(x)$.

Définition 6. Soit I un intervalle contenant x_0, ou dont une borne est x_0. Soit la fonction $f : I \to \mathbb{K}$.

La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si et seulement si $f(x_0 + h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 (par rapport à la variable h).

On abrège parfois « développement limité d'ordre n en x_0 » par « $\mathrm{DL}_n(x_0)$ ».

Remarque 10. On énoncera tous les résultats pour des $\mathrm{DL}_n(0)$, pour plus de simplicité, et parce que c'est le cadre le plus fréquent d'application. Pour obtenir les résultats en x_0, remplacer 0 par x_0 et x par $x - x_0$.

3.2 Propriétés des développements limités

Proposition 7. Unicité

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, celui-ci est unique.

Démonstration. On suppose que $f = P + o_0(x^n) = Q + o_0(x^n)$ avec P, Q deux polynômes de degrés au plus n. On a :$P(x) - Q(x) = o_0(x^n)$ donc $\dfrac{P(x) - Q(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, ce qui implique, soit que $P - Q = 0$, soit que le terme de plus bas degré de $P - Q$ est de degré strictement plus grand que n. La seconde option n'est pas possible donc $P = Q$. □

Proposition 8. Parité

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0,
- ⋆ si f est paire, alors sa partie principale ne contient que des termes de degrés pairs.
- ⋆ si f est impaire, alors sa partie principale ne contient que des termes de degrés impairs.

Démonstration. Soit $f(x) = P(x) + I(x) + o_0(x^n)$ avec P et I des polynômes respectivement pairs et impairs, de degrés au plus n. Si f paire on a (en appliquant ce qui précède à $-x$) : $f(-x) = P(x) - I(x) + o_0(x^n) = P(x) + I(x) = f(x)$, par unicité de la partie principale, on a : $I(x) = 0$. On raisonne de même si f est impaire. □

3.3 Opérations sur les développements limités

Remarque 11. Les opérations sur les développements limités s'effectuent en utilisant la proposition ??.

EXEMPLE 14. ✎ Obtenir un $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$ et $\dfrac{1}{1+x^2}$. (méthode importante pour les DL de quotients)

Obtenir un $DL_2(0)$ de $\dfrac{1}{1+x-x^2+x^3}$ et $\dfrac{x-x^2+x^3}{1+x}$.

4. Formule de Taylor

4.1 Intégrer les développements limités

PROPOSITION 9. INTÉGRER UN DL

Soit une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f admet un $DL_n(0)$:

$$\forall x \in I,\ f(x) = P(x) + o_0(x^n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + o_0(x^n) \text{ où } P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

Alors une primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie principale est la primitive de P qui vaut $F(0)$ en 0 :

$$\forall x \in I,\ F(x) = F(0) + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right) + o_0(x^{n+1})$$

Démonstration. On note Q la primitive de P qui vaut $F(0)$ en 0. Soit $x \in I \setminus \{0\}$. On a : L

$$|F(x) - Q(x)| = \left|\int_0^x (f(x) - P(x))dx\right| \leqslant |x| \times \max_{t\in[0;x]} |f(t) - P(t)| \leqslant |x| \max_{t\in[0;x]} |t^n \varepsilon(t)| \leqslant |x|^{n+1} \max_{t\in[0;x]} |\varepsilon(t)|$$

où ε est une fonction continue sur $[0;x]$ qui tend vers 0 en 0. Ainsi, $F(x) - Q(x) = o_0(x^{n+1})$.

EXEMPLE 15. ✎ À partir des résultats de l'exemple ?? donner le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\arctan(x)$.

4.2 Formule de Taylor-Young

PROPOSITION 10. FORMULE DE TAYLOR ET YOUNG

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ où I est un intervalle contenant 0. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^n) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

Démonstration. Par récurrence sur n, appliquer l'hypothèse de récurrence à f' et utiliser la proposition ??. □

EXEMPLE 16. ✎ Déterminer la dérivée d'ordre n de exp et en déduire le $DL_n(0)$ de la fonction exponentielle. Déterminer de même le $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$.

4.3 Dérivation de développements limités

PROPOSITION 11. DÉRIVER LES DL

Soit f une fonction dérivable et de dérivée continue sur un intervalle I. Si f et f' admettent respectivement des développements limités d'ordre $n+1$ et n en 0, alors la partie principale du $DL_n(0)$ de f' est la dérivée de la partie principale du $DL_{n+1}(0)$ de f.

5. Applications des développements limités

5.1 Calcul de limites

Exemple 17. Calculer ① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(2x)}$ ② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2^x+3^x-5^x)}{2^x+3^x-2\times 5^x}$

5.2 Recherche d'équivalents

Méthode 4.

Soit f définie sur un intervalle I qui contient 0, ou dont une borne est 0. Supposons que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n) \text{ avec les } a_i \text{ non tous nuls.}$$

Si $a_0 \neq 0$, $f(x) \underset{0}{\sim} a_0$. Sinon, en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

Exemple 18. ✎ Trouver un équivalent simple en 0 de $\dfrac{\operatorname{sh}^2(x) - \sin^2(x)}{1-\cos(x^3)}$.

5.3 Continuité, dérivabilité, tangentes

Remarque 12 (Prolongement par continuité). Soit I un intervalle et $x_0 \notin I$ un réel. Soit la fonction $f : I \to \mathbb{K}$. Si $f(x) = b + o_{x_0}(x - x_0)$ alors f se prolonge par continuité en posant $f(x_0) = b$. Cela découle de : $f(x) = b + o_{x_0}(x-x_0) \iff f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} b$.

Remarque 13 (Dérivabilité). Soit I un intervalle et x_0 un réel. Soit la fonction $f : I \to \mathbb{K}$. Si $f(x) = b + axo(x - x_0)$ alors f (ou son prolongement par continuité en 0) est dérivable et $f'(x_0) = a$. Cela découle de : $f(x) = b + a(x-x_0) + o_0(h) \iff \dfrac{f(x)-b}{x-x_0} = a + o_{x_0}(1) \xrightarrow[h\to 0]{} a$.

Méthode 5.

Si f admet un $DL_1(x_0)$, l'équation de la tangente en x_0 est donnée par la partie principale $b + ax$ du développement, d'après la remarque ??.
En appliquant la méthode de la section ??, on peut éventuellement trouver un équivalent de la forme

$$f(x) - (ax+b) \underset{x_0}{\sim} a_p (x-x_0)^p,$$

et le signe du membre de droite donne la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0.

Exemple 19. Prolonger par continuité et étudier la dérivabilité et la position relative de la courbe et de la tangente en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

5.4 Recherche d'asymptote

Méthode 6. Développement asymptotique

Si on obtient en $+\infty$ (en effectuant des développements limités en la variable $1/x$, qui tend vers 0) :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_p}{x^p} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

avec $a_p \neq 0$, alors :
- ⋆ $y = a_0 x + a_1$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe de f.
- ⋆ $f(x) - a_0 x - a_1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_p}{x^p}$ donne par son signe la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de l'infini.

Exemple 20. ✎ Rechercher l'asymptote en $+\infty$ de la courbe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$, ainsi que leur position relative au voisinage de $+\infty$.

6. Développements limités classiques

⚠ Les développements limités qui suivent ne sont valables qu'au voisinage de 0 !

$\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o_0(x^n)$	
$\longrightarrow$ $\operatorname{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n})$	car $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\longrightarrow$ $\operatorname{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1})$	car $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\longrightarrow$ $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n})$	car $\cos(x) = \operatorname{ch}(ix)$
$\longrightarrow$ $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1})$	car $\sin(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(ix)}{i}$
$\longrightarrow$ $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o_0(x^7)$	par quotient

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$	
$\longrightarrow$ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$	$x \to -x$
$\longrightarrow$ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o_0(x^n)$	par intégration
$\longrightarrow$ $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n})$	$x \to -x^2$
$\longrightarrow$ $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$	par intégration

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_0(x^n)$ [1]	
$\longrightarrow$ $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \cdots + o_0(x^n)$	$\alpha = \frac{1}{2}$
$\longrightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + \cdots + o_0(x^{2n})$	$\alpha = -\frac{1}{2}$ et $x \to -x^2$
$\longrightarrow$ $\arcsin(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \cdots + o_0(x^{2n+1})$	par intégration
$\longrightarrow$ $\dfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = -1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{8}x^4 - \cdots + o_0(x^{2n})$	
$\longrightarrow$ $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{40}x^5 - \cdots + o_0(x^{2n+1})$	par intégration

(1). par analogie, on généralise la définition du coefficient k parmi n lorsque k n'est pas entier : $\dbinom{n}{\alpha} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

TD du §7

Exercice 1. Limites avec équivalents

Calculer la limite suivante, éventuellement au moyen d'équivalents :

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\tan(3x)}$ ② $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ③ $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\cos(x)}{\sin(2x)}$ ④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$ ⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(x)+\sin(5x)}$

⑥ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$ ⑦ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{x^3+x^4}$ ⑧ $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\ln(1+\ln(1+x))$ ⑨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin^2(x))}{(\pi/2-x)^2}$

Exercice 2. Racine cubique

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{x}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

① Montrer que $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $r : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sa bijection réciproque. Calculer r' sur $\mathbb{R}^*$.

② Étudier la continuité, puis la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f.

③ Montrer que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

④ Représenter la courbe de f, ses tangentes remarquables et son asymptote.

Exercice 3. Développements limités

Donner le développement limité à l'ordre

① 3 en 0 de $(1+x)^x$ ② 3 en 0 de $\dfrac{1}{2-x}$. ③ 4 en 0 de $\sqrt{1+x}\arcsin(x)$ ④ 6 en 0 de $\cos^2(x)$

⑤ 4 en 0 de $\exp(\cos(x))$. ⑥ 4 en 0 de $\dfrac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$. ⑦ 4 en e de $\ln(x)$. ⑧ 4 en 2 de $\exp(x)$.

Exercice 4. Limites et développements limités

Calculer ① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3}$ ② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{\mathrm{sh}(x)-x\mathrm{ch}(x)}$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos(x)+\dfrac{1}{2}\sin^2(x)\right)^{1/x^4}$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$. ⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ ⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$

Exercice 5. Limite de suite ATS 2010

Déterminer la limite en $+\infty$ de $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$.

Exercice 6. Limite de fonction ATS 2010

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Exercice 7. Étude locale

À partir d'un développement limité, déduire le prolongement par continuité, dérivabilité, la position relative locale courbe–tangente de

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ en $x = 0$.

Exercice 8. Asymptotes et développements limités

Chercher les asymptotes à la courbe de f, ainsi que la position relative de l'asymptote et de la courbe au voisinage de l'infini, où

$f : \mathbb{R}^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2-x+2}{x+1}e^{-1/x}$.

Exercice 9. Arc tangente

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\arctan(x)$.

Calculer, pour $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

En déduire un développement asymptotique en $o(\frac{1}{x^3})$ de arctan en $+\infty$ puis en $-\infty$.

Bilan du § 7

Prérequis

① Fonctions usuelles : tout ! §2 Fonctions usuelles .... ☐

Objectifs prioritaires

① Savoir calculer des limites (??) avec des formes indéterminées (??) .... ☐

(a) savoir refaire les exemples ??, ??, ??, ?? et ?? .... ☐

② connaître les théorèmes d'encadrement, le passage à la limite dans les inégalités : ?? .... ☐

③ connaître la relation de prépondérance : ?? (définition, opérations, comparaisons) .... ☐

④ connaître la relation d'équivalence : ?? (définition, opérations) .... ☐

(a) savoir refaire l'exemple ?? .... ☐

(b) savoir refaire l'exercice ?? .... ☐

⑤ savoir et savoir retrouver les développements limités classiques (section ??) .... ☐

⑥ connaître l'interprétation d'un DL d'ordre 1 (remarques ?? et ??) .... ☐

⑦ savoir obtenir un DL de somme, produit, composée (section ??) .... ☐

⑧ savoir obtenir un DL de quotient (exemple ??) .... ☐

⑨ connaître la formule de Taylor-Young (proposition ??) .... ☐

⑩ savoir intégrer (proposition ??), dériver (proposition ??) un DL .... ☐

⑪ savoir appliquer les DL aux calculs de limite (section ??) .... ☐

⑫ savoir appliquer les DL aux recherches d'équivalents (section ??) .... ☐

⑬ savoir appliquer les DL aux recherches de tangentes et d'asymptotes (sections ?? et ??) .... ☐

Objectifs secondaires

① Comprendre la démonstration du résultat d'intégration des DL (proposition ??) .... ☐

Approfondissement

① Connaître et savoir exploiter les définitions ?? et ?? de limites. .... ☐