§ 12 : Espaces vectoriels

1. Concepts fondamentaux

1.1 Notion d'espace vectoriel

Notation 1. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont des entiers naturels non nuls.

Définition 1. Un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$,

$$+ : \begin{cases} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{cases} \quad \text{et } \cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda u \end{cases}$$

qui satisfont les huit axiomes suivants est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

① $+$ est associative : $\forall (u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$.
② élément neutre 0_E : $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$.
③ opposé : $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ v + u = u + v = 0_E$. On note : $v = -u$.
④ commutativité de $+$: $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v = v+u$.
⑤ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall u \in E,\ (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.
⑥ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v) \in E^2,\ \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.
⑦ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall u \in E,\ \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
⑧ $\forall u \in E,\ 1u = u$.

Exemple 1. Les propriétés des opérations usuelles font du corps des réels $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.
De même, le corps des complexes $\mathbb{C}$ est à la fois un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Exemple 2. $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni des lois suivantes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
$\forall u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall v \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ u+v \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda u \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.
On indique par : $(+)$ la définition de la somme, $(\cdot)$ l'usage de la définition du produit externe, et $(\mathbb{R})$ celui de propriétés de $\mathbb{R}$ dans les coordonnées. On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall v \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall w \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

① : $(u+v)+w \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} (x+x')+x'' \\ (y+y')+y'' \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x+(x'+x'') \\ y+(y'+y'') \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+x'' \\ y'+y'' \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=}$
$u+(v+w)$.

④ : $u+v \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x'+x \\ y'+y \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} v+u$.

② : soit $0_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a : $u + 0_E \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+0 \\ y+0 \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \overset{④}{=\!=} 0_E + u$

③ : soit $v \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. On a : $u+v \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} x+(-x) \\ y+(-y) \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_E \overset{④}{=\!=} v+u$

⑤ $(\lambda+\mu)u \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)x \\ (\lambda+\mu)y \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x \\ \lambda y + \mu y \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \lambda u + \mu u$.

⑥ $\lambda(u+v) \overset{(+)}{=\!=} \lambda \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda(x+x') \\ \lambda(y+y') \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda x' \\ \lambda y + \lambda y' \end{pmatrix} \overset{(+)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \lambda u + \lambda v$.

⑦ $\lambda(\mu u) \overset{(\cdot)}{=\!=} \lambda \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} \lambda(\mu x) \\ \lambda(\mu y) \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} (\lambda\mu)x \\ (\lambda\mu)y \end{pmatrix} \overset{(\cdot)}{=\!=} (\lambda\mu)u$.

⑧ $1u \overset{(\cdot)}{=\!=} \begin{pmatrix} 1x \\ 1y \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=\!=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u$.

Exemple 3. (Fondamental) En généralisant la démonstration de l'exemple 2 :

- ⋆ $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ⋆ L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices $n \times p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ⋆ L'ensemble des fonctions $\mathbb{K}^I$ d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ⋆ L'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ⋆ $\{0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ⋆ plus généralement, le produit cartésien $E \times F$ de deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Notion d'application linéaire

Définition 2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels. Une application $L : E \to F$ est dite *linéaire* si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u,v) \in E \times E,\ L(\lambda u + v) = \lambda L(u) + L(v)$$

L'image par une application linéaire d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Il s'agit aussi d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel !

Exemple 4 (Matrices). Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Vérifier que $L : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $X \mapsto AX$ est une application linéaire, appelée application linéaire *canoniquement* associée à la matrice A.

Remarque 1. En particulier, si $L : E \to F$ est linéaire, $L(0_E) = 0_F$.

Exemple 5 (Vecteurs colonnes). Indiquer en justifiant celles des applications suivantes qui sont linéaires :

① $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$ ② $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x+1$ ③ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ④ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

⑤ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ ⑥ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-2y \\ y-x \end{pmatrix}$ ⑦ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

⑧ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⑨ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exemple 6 (Fonctions). Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

① $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y \mapsto y'' + y$ ② $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ y \mapsto y(2)$ ③ $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$

Exemple 7 (Suites). Montrer que l'application suivante, définie sur le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs complexes, est linéaire : $s : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ deux applications linéaires. Alors la composée $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ est aussi une application linéaire.

Démonstration. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u,v) \in E \times E,\ g \circ f(\lambda u + v) \overset{f \text{ linéaire}}{=\!=\!=} g(\lambda f(u) + f(v)) \overset{g \text{ linéaire}}{=\!=\!=} \lambda g \circ f(u) + g \circ f(v)$.
La composée de g et f est linéaire. □

1.3 Notion de sous–espace vectoriel

Définition 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n vecteurs $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et n scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
Le vecteur : $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \dots, u_n$.

Définition 4. Un sous-ensemble F non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, stable par combinaison linéaires finies, est un *sous-espace vectoriel* de E.

MÉTHODE 1. Reconnaître un sous-espace vectoriel

Pour montrer qu'un sous ensemble F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel, on vérifie que :

① $0_E \in F$ (ce qui prouve que $F \neq \varnothing$)

② $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (u, v) \in F \times F$, on a : $\lambda u + v \in F$. (stabilité par combinaisons linéaires)

le second point équivaut à la stabilité de F par combinaisons linéaires (récurrence immédiate).

⚠ les quantificateurs $\forall$ sont indispensables pour que la démonstration ait un sens.

EXEMPLE 8 (Plan). Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (et les reconnaître) :

① $D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0 \right\}$ ② $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1 \right\}$ ③ $D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x = y \geqslant 0 \right\}$

EXEMPLE 9 (Espace). Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (et les reconnaître) :

① $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 0 \right\}$ ② $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ ③ $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

EXEMPLE 10 (Matrice). Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées réelle de taille n dont la somme des coefficients de chaque ligne est nul :

$$\mathcal{E} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \right\}$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (bonus : vérifier que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication).

EXEMPLE 11 (Suites). Dire les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles :

① $\{(u_n) \in S,\ (u_n) \text{ converge}\}$

② $\{(u_n) \in S,\ \lim u_n = 1\}$

③ $\{(u_n) \in S,\ (u_n) \text{ croissante}\}$

④ $\{(u_n) \in S,\ (u_n) \text{ bornée}\}$

⑤ $\{(u_n) \in S,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\}$

⑥ $\{(u_n) \in S,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2\}$

EXEMPLE 12 (Fonctions). Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

① $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ② $\{f \in \mathcal{F},\ f(2016) = 0\}$ ③ $\{y \in \mathcal{F}, y(x) = o_{+\infty}(x)\}$ ④ $\{f \in \mathcal{F},\ f \text{ impaire}\}$

REMARQUE 2. Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel. La plupart du temps, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on montrera qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des espaces de référence de l'exemple 3.

2. Sous-espaces vectoriels

2.1 Sous-espace engendré par un famille de vecteurs

PROPOSITION 2.

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et n vecteurs de E : $u_1, \ldots, u_n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E. On le note

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n :\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, on dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une *famille génératrice* de F, ou un *système de générateurs* de F, ou encore qu'elle *engendre* F.

Démonstration. $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ contient $0u_1 + \cdots + 0u_n = 0_E$: il est non vide.

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \times \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, par définition :

$\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n, u=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n$ et $\exists(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{K}^n, v=\beta_1u_1+\dots+\beta_nu_n$ donc $\lambda u+v=\lambda(\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n)+\beta_1u_1+\dots+\beta_nu_n=(\lambda\alpha_1+\beta_1)u_1+\dots+(\lambda\alpha_1+\beta_n)u_n\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$.

$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de E. □

Notation 2. Par convention, si $n=0$, $\mathrm{Vect}(\varnothing)=\{0_E\}$.

On note également $\mathbb{K}u=\mathrm{Vect}(u)$. (l'espace engendré par un vecteur est formé de ses multiples).

Exemple 13 (Espace). On considère les vecteurs $u={}^t(1\,;0\,;0)$ et $v={}^t(1\,;1\,;1)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Décrire $\mathrm{Vect}(u,v)$ par une équation. Interpréter le résultat.

Trouver une famille génératrice de chacun des espaces de l'exemple 9.

Exemple 14 (Suites). Soit $u=(u_n)$ le vecteur du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n$ et $u_0=1$. Décrire $\mathrm{Vect}(u)$.

Exemple 15 (Fonctions). Soit $E=\{y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y''+y=0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer un système générateur de F.

Exemple 16 (Polynômes). Quelle est la forme générale d'un vecteur du sous-espace des fonctions $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, défini par $\mathbb{R}_n[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2,\dots,X^n)$ (où $X:x\mapsto x$) ?

Remarque 3. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, une droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel engendré par n'importe lequel de ses vecteurs directeurs.

Dans $\mathbb{R}^3$, un plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriels engendré par un système de deux vecteurs directeurs non colinéaires.

Remarque 4. On peut également considérer un espace vectoriel engendré par une famille infinie de vecteurs : les vecteurs de cet espace engendré sont alors les combinaisons linéaires *finies* du système infini de générateurs.

Ainsi, le sous–espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$) défini par $\mathbb{R}[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2,\dots)$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 3. Intersection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection de F et G, $F\cap G=\{u\in E$ tels que $u\in F$ et $u\in G\}$, est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous les deux 0_E, donc $0_E\in F\cap G$. Par ailleurs, $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(u,v)\in(F\cap G)\times(F\cap G)$, on a $(u,v)\in F\times F$, et F étant un sous-espace vectoriel : $\lambda u+v\in F$. De même, $\lambda u+v\in G$, donc $\lambda u+v\in F\cap G$. Ainsi $F\cap G$ est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 17 (Espace). Calculer l'intersection des espaces P et D de l'exemple 9.

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 4. Somme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la *somme* des espaces F et G, définie par $F+G=\{u+v,\ u\in F,\ v\in G\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
En particulier, $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\mathbb{R}u_1+\dots+\mathbb{R}u_n$.

Démonstration. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous les deux 0_E, donc $0_E=0_E+0_E\in F+G$. Par ailleurs, $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(u,v)\in(F+G)\times(F+G)$, il existe $(f_1,g_1)\in F\times G$, $(f_2,g_2)\in F\times G$

tels que $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$. Ainsi, $\lambda u + v = \lambda(f_1 + g_1) + f_2 + g_2 = (\lambda f_1 + f_2) + (\lambda g_1 + g_2) \in F + G$. Donc $F + G$ est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

> DÉFINITION 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
>
> La somme $F + G$ est dite *directe* si pour tout $w \in F + G$, il existe un unique couple $(u, v) \in E \times F$ tel que $w = u + v$. On note alors $F + G = F \oplus G$.
>
> Les sous-espaces F et G sont dits supplémentaires, si et seulement si $E = F \oplus G$

PROPOSITION 5. La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Les espaces F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

Démonstration. Si $F \cap G = \{0\}$, et $w \in F + G$ vérifie $w = u + v = u' + v'$ avec $(u, v) \in F \times G$ et $(u', v') \in F \times G$, alors $u - u' = v' - v \in F \cap G$, donc $u - u' = v - v' = 0$ puis $u = u'$ et $v = v'$: la décomposition de w est unique et F et G sont en somme directe.

Réciproquement, si la somme est directe, soit $w \in F \cap G$. On a $w = u + v = u' + v'$ avec $(u, v) = (w, 0)$ et $(u', v') = (0, w)$. Par unicité de la décomposition de w, $u = u'$ donc $w = 0$: $F \cap G = \{0\}$.

EXEMPLE 18 (Espace). Montrer que les espaces P et D de l'exemple 9 sont supplémentaires.

3. Applications linéaires

3.1 Noyau d'une application linéaire

PROPOSITION 6. NOYAU

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
L'ensemble des solutions de l'équation $L(x) = 0_F$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Ker}(L)$:

$$\mathrm{Ker}(L) = \{x \in E,\ L(x) = 0_F\} \subset E$$

Ce sous-espace vectoriel de E est appelé le *noyau* de l'application linéaire L.

Démonstration. L étant linéaire : $L(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \mathrm{Ker}(L)$: le noyau est non vide.

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in \mathrm{Ker}(L) \times \mathrm{Ker}(L)$, on a : $L(\lambda u + v) \xlongequal{\text{L linéaire}} \lambda L(u) + L(v) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$ car u et v sont dans le noyau de L. Donc $\lambda u + v \in \mathrm{Ker}(L)$: le noyau est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sous-espace vectoriel de E. $\square$

MÉTHODE 2. Générateurs du noyau

Rechercher le noyau d'une application linéaire, c'est résoudre l'équation $L(x) = 0$. Lorsque E et F sont de type $\mathbb{K}^n$, cela se fait par la méthode du pivot de Gauss, qui permet d'obtenir un système paramétrique puis de générateurs (et même une base) du noyau. La description de $\mathrm{Ker}(L)$ avec des équations est immédiate.

EXEMPLE 19. Rechercher les noyaux des applications linéaires des exemples 5 ⑦ et 6 ①.

3.2 Image d'une application linéaire

PROPOSITION 7. IMAGE

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
L'ensemble des images $L(u)$ où $u \in E$, est un sous-espace vectoriel de F, noté $\mathrm{Im}(L)$:

$$\mathrm{Im}(L) = \{L(u),\ u \in E\} \subset F$$

Ce sous-espace vectoriel de F est appelé l'*image* de l'application linéaire L.

Démonstration. Comme $L(0_E)=0_F$, 0_F appartient à l'image de L qui est non vide.
$\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(u,v)\in \mathrm{Im}(L)\times\mathrm{Im}(L)$, par définition, il existe $x\in E$ et $x'\in E$ tels que $u=L(x)$ et $v=L(x')$. Ainsi, $\lambda u+v=\lambda L(x)+L'(x')\overset{\text{L linéaire}}{=\!=\!=}L(\lambda x+x')\in\mathrm{Im}(L)$: l'image est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sous-espace vectoriel de F. □

MÉTHODE 3. Équation linéaire de l'image
si $E=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$, alors $\mathrm{Im}(L)=\mathrm{Vect}(L(u_1),\dots,L(u_k))$: on obtient facilement un système générateur de l'image d'une application linéaire. Pour obtenir une description par des équations linéaires dans le cas où E et F sont de type $\mathbb{K}^n$, on résout $y=L(x)$ avec la méthode du pivot de Gauss : les lignes de zéros donnent des conditions nécessaires à l'existence de solution sous forme d'équations.

EXEMPLE 20. Rechercher les images et les noyaux des applications linéaires des exemples 5 ④, ⑥ et ⑨ et de l'exemple 7.

3.3 Applications linéaires particulières

DÉFINITION 6. Soit $L\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire :
- ⋆ L est un *endomorphisme* si et seulement si $F=E$.
- ⋆ L est un *isomorphisme* si et seulement si $\mathrm{Ker}(L)=\{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(L)=F$. (L bijection linéaire)
- ⋆ L est un *automorphisme* est un endomorphisme et un automorphisme. (bijection linéaire de E dans E)

REMARQUE 5. On vérifie qu'un isomorphisme est une bijection : comme $\mathrm{Im}(L)=F$, L est surjective et si $L(u)=L(v)$, par linéarité, $L(u-v)=0$ donc $u-v\in\mathrm{Ker}(L)=\{0_E\}$: $u=v$. Ainsi, L est injective.

PROPOSITION 8.

Soit $L\in\mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors la bijection réciproque $L^{\langle -1\rangle}$ est aussi une application linéaire : $L^{\langle -1\rangle}\in\mathcal{L}(F,E)$.

Démonstration. $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(u,v)\in F\times F$, comme L est bijective, il existe u' et v' uniques dans E tels que $u=L(u')$ et $v=L(v')$. Ainsi, $L^{\langle -1\rangle}(\lambda u+v)=L^{\langle -1\rangle}(\lambda L(u')+L(v'))=L^{\langle -1\rangle}\circ L(\lambda u'+v')=\lambda u'+v'=\lambda L^{\langle -1\rangle}\circ L(u')+L^{\langle -1\rangle}\circ L(v')=\lambda L^{\langle -1\rangle}(u)+L^{\langle -1\rangle}(v)$: $L^{\langle -1\rangle}$ linéaire. □

REMARQUE 6. L'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E, noté $\mathrm{GL}(E)$, est un groupe pour la composition (stable, associatif, d'élément neutre l'identité Id et tout automorphisme a une réciproque).

3.4 Équations linéaires

DÉFINITION 7. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E vers F et $b\in F$. L'équation d'inconnue $x\in E$: $u(x)=b$ est appelée *équation linéaire*. Le vecteur b est le *second membre* de l'équation linéaire. Une équation linéaire est dite *homogène* lorsque elle est sans second membre : $u(x)=0_F$.

PROPOSITION 9. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Soit $b\in F$.
① l'ensemble des solutions de l'équation homogène $u(x)=0_F$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u)$.
② (structure des solutions d'une équation linéaire) si x_0 est une solution particulière de l'équation linéaire $u(x)=b$, l'ensemble des solutions de cette équation est $x_0+\mathrm{Ker}(u)$ (solution particulière plus solutions de l'équation sans second membre).
③ (principe de superposition) si x_1 vérifie $u(x_1)=b_1$ et x_2 vérifie $u(x_2)=b_2$, alors x_1+x_2 est une solution particulière de l'équation linéaire $u(x)=b_1+b_2$.

Démonstration. ① : c'est la définition du noyau. ③ $b_1+b_2=u(x_1)+u(x_2)=u(x_1+x_2)$.
② $u(x)=b \iff u(x)-u(x_0)=b-u(x_0) \iff u(x-x_0)=0_F \iff x-x_0\in\mathrm{Ker}(u) \iff x\in x_0+\mathrm{Ker}(u)$.

EXEMPLE 21. Donner deux exemples dans des espaces différents qui illustrent la proposition 9.

TD DU § 12

Exercice 1. Reconnaître un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Montrer que l'ensemble suivant est un espace-vectoriel engendré par une famille de vecteurs à préciser :

① $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$. ② $E = \left\{ \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + y \\ -x + 3y \end{pmatrix} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

③ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y\}$. ④ $F \cap G$ où $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0 \right\}$.

⑤ $\mathrm{Vect}(a, b) \cap \mathrm{Vect}(c, d)$ dans $\mathbb{R}^3$ où $a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Sous–espace vectoriel de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables

Dire, en justifiant, si l'ensemble E suivant est un sous–espaces vectoriels du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

① $E = \left\{ f \in \mathcal{F},\ f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \right\}$ ② $E = \{f \in \mathcal{F},\ \exists (a, b) \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x + b)\}$

③ $E = \{f \in \mathcal{F},\ f(1) = 0\}$ ④ $E = \{f \in \mathcal{F},\ f(0) = 1\}$ ⑤ $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(t)\,dt = 0 \right\}$

Exercice 3. Étude d'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

On a défini ci–dessous une application $\mathcal{L}$.

Montrer qu'il s'agit d'une application linéaire canoniquement associée à une matrice, que l'on précisera.

Déterminer un système de générateurs de son noyau, et décrire son image par un système d'équations linéaires.

Préciser si $\mathcal{L}$ est injective, surjective ou bijective.

① $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2x - y + z)$
② $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ {}^t(x, y, z) \mapsto {}^t(x + y + z, x + y - z, x - y + z, -x + y + z)$
③ $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y + 3z + 4t, -x - y + z)$

Exercice 4. Décomposition d'une fonction comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeur réelles.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{I}$, l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}$.

① Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$, et qu'ils sont en somme directe.
② Soit $f \in \mathcal{F}$. En supposant que $f = p + i$ où $p \in \mathcal{P}$ et $i\mathcal{I}$, exprimer p et i en fonction de f.
En déduire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires.
③ Quelle est l'unique décomposition de la fonction exponentielle comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?

Exercice 5. Symétrie du plan vectoriel

Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x\,; y) \mapsto \left(\dfrac{x + y}{2} ; \dfrac{3x - y}{2} \right)$.

① Montrer que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme $\mathbb{R}^2$. Déduire du calcul de $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}$ que $\mathcal{L}$ est un automorphisme.
② Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathcal{L} - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\mathcal{L} + \mathrm{Id})$. Représenter ces espaces et vérifier qu'ils sont supplémentaires.
③ À partir du dessin précédent, expliquer comment construire l'image de $u(x\,; y)$ par l'automorphisme $\mathcal{L}$.
④ Donner une interprétation géométrique de l'automorphisme $\mathcal{L}$.

Exercice 6. Les deux structures d'espace vectoriel de $\mathbb{C}$

Dire si l'application suivante est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, puis du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Interpréter géométriquement l'application. ① $z \mapsto z + 1$. ② $z \mapsto 2z$ ③ $z \mapsto \bar{z}$ ④ $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}} z$

Exercice 7. Applications linéaires et polynômes
On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels.

Vérifier que l'application suivante est linéaire, puis déterminer son noyau et son image.

① $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X],\ P \mapsto P'$.
② $e : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R},\ P(a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Matrices symétriques et antisymétriques
On note $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$.

Soit $p : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ A \mapsto \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.

① Montrer que p est un endomorphisme.
② Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, alors $p(A) = A$. En déduire $\mathrm{Im}(p)$.
③ Démontrer que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$.
④ Vérifier que $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
⑤ Déduire de ce qui précède : $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$. Décomposer une matrice carrée A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Cette écriture est–elle unique ?

Bilan du § 12

Prérequis

① Maîtriser le chapitre §10 Matrices .... ☐
② Rudiments de calcul dans les complexes : §3 Complexes .... ☐

Objectifs prioritaires

① savoir prouver qu'un sous ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel (1.3) .... ☐
  (a) dans le cas classique $\mathbb{K}^n$: exemples 8 et 9 .... ☐
  (b) dans les cas plus abstraits : exemples 11 et 12, exercice 2 .... ☐
② connaître la définition d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs (2.1) .... ☐
  (a) savoir refaire l'exercice 1 .... ☐
③ connaître la définition de l'intersection, de la somme de deux sous-espaces vectoriels (2.2) .... ☐
④ savoir démontrer qu'une application est (ou n'est pas) linéaire (1.2) .... ☐
⑤ connaître la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire (3.1) .... ☐
  (a) système d'équations et système générateur du noyau de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, F)$. (exemple 19) .... ☐
  (b) système d'équations et système générateur de l'image de $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$. (exemple 20) .... ☐
  (c) exercices 3 et 5 ($\mathbb{K}^n$) .... ☐

Objectifs secondaires

① connaître la structure des solutions d'une équation linéaire (3.4) .... ☐

Approfondissement

① connaître les huit propriétés d'un espace vectoriel (1.1) .... ☐