Volume d'un intervalle et équation de Volterra sur un espace symétrique ordonné.

Yann Angeli

le 28 mars 2006.

Résumé

On répond questions ouvertes 4,6,7,8 présentés dans [4] dans le cadre des espaces symétriques ordonnés de type Makarevič.(tous les espaces symétriques ordonnés sont de ce type, en dehors de quatre cas exceptionnels). On prouve que l'algèbre de Volterra est sans diviseur de zéro, on étudie le comportement asymptotique du volume d'un intervalle, celui des puissances de convolution de la fonction caractéristique du futur du point base, et enfin on prouve l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Volterra.

1 Espaces symétriques ordonnés

La structure d'espace symétrique ordonné est introduite et étudiée dans [5]. On considère un espaces symétrique $\mathcal{M} = G/H$ où G est un groupe de Lie connexe réductif muni d'un automorphisme involutif τ et H est un sous-groupe fermé de G, qui vérifie :

$$(G^\tau)_o \subset H \subset G^\tau,$$

où G^τ désigne le groupe des points fixes de τ et l'indice o la composante connexe qui contient l'identité. On s'intéressera aux espaces munis d'une structure causale invariante :

On dit qu'une variété $\mathcal{N}$ est munie d'une structure causale si elle est munie d'un champ de cônes réguliers :

$$\mathcal{M} \ni x \mapsto \mathcal{C}_x \subset T_x(\mathcal{M}).$$

On rappelle qu'un cône régulier est un cône convexe, fermé, pointu (ne contenant aucune droite) et d'intérieur non vide. Une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ est causale si elle satisfait

$$\gamma'(t) \in \mathcal{C}_t \quad \forall t \in [a, b].$$

Lorsque qu'il n'exsite pas de courbe fermée non-triviale, la structure causale est dite globale, et elle définit un ordre partiel sur $\mathcal{M}$ par $x \leq y$ s'il existe une courbe causale reliant x à y. Dans ce cas, la structure est dite globalement hyperbolique si les intervalles $[x,z] = \{y \in \mathcal{M} \mid x \leq y \leq z\}$ sont compacts.

L'espace $\mathcal{M}$ est dit ordonné s'il est muni d'une structure causale globale et invariante :

$$\mathcal{C}_{\tau(g)x} = d\tau(g)_x(\mathcal{C}_x).$$

Dans ce cas, on dit que la paire $(\mathfrak{g}, \tau)$ est ordonnée. On s'intéresse à la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$:

Notation 1 *G désigne maintenant une groupe de Lie simple réel, à centre fini. Son algèbre est notée $\mathfrak{g}$. On peut toujours choisir une involution de Cartan θ qui commute à τ. On note alors respectivement $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}$ les algèbres de points fixes de θ et τ, H et K les sous-groupes connexes de G associés, et $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ les espace propres associés à -1 de θ et τ.*

Le théorème 3.1.3 de [5] caractérise les espaces ordonnés :

Théorème 1.1 *On suppose que $\mathcal{M}$ est un espace symétrique non-Riemannien, simple et irréductible. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{M}$ est un espace symétrique ordonné.*
2. $\dim\{X \in \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p} \mid \mathrm{Ad}(H \cap K)X = X\} = 1$

La structure causale associée sur $\mathcal{M}$ est alors globale et globalement hyperbolique.

On introduit les notations relatives à la décomposition d'Iwasawa :

Notation 2 *On se donne une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a} \subset p$ de $\mathfrak{g}$, on note Σ le système de racines restreintes correspondant, et W son groupe de Weyl. On se donne un système de racines positives $\Sigma^+ \subset \Sigma$, on désigne respectivement par Π, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}^+$, et ρ le système de racines simples, l'algèbre nilpotente, la chambre de Weyl positive et la demi-somme des racines associés. Enfin, on munit $\mathfrak{a}$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ donné par la restriction de la forme de Killing B, et on identifie l'espace dual $\mathfrak{a}^*$ à $\mathfrak{a}$ par ce produit scalaire.*

Le théorème 3.2.4 de [7] caractérise les paires ordonnées :

Théorème 1.2 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe une involution τ telle que $(\mathfrak{g}, \tau)$ soit ordonnée.*
2. *il existe $X_+ \in \mathfrak{p}$ tel que le spectre de $\mathrm{ad}X_+$ soit $\{-1, 0, 1\}$.*
3. *Σ est réduit ($\alpha \in \Sigma \Rightarrow 2\alpha \notin \Sigma$) et il existe $\alpha \in \Pi$ tel que la multiplicié de α dans la racine la plus longue de Σ^+ soit 1.*

Dans ce cas, X_+ est unique au signe près et appelé l'élement causal, et τ peut-être choisie afin de commuter à θ.

Précisons les notations spécifiques aux paires ordonnées.

Notation 3 *On suppose que $\mathcal{M}$ est ordonné. On note $\mathbf{o} = 1H$ le point base de l'espace $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+ = \{x \in \mathcal{M} \mid x \geq \mathbf{o}\}$ l'avenir du point base pour la relation d'ordre associée.*
Pour $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, on pose $\Sigma_\epsilon = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(X_+) = \epsilon X_+\}$ et $\mathfrak{g}_\epsilon = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X_+, X] = \epsilon X\}$. L'ensemble Σ_0 est l'ensemble des racines compactes, $\Sigma_1 \cup \Sigma_{-1}$ celui des racines non-compactes. En outre, $\Sigma_1 \subset \Sigma_+$. On note N, N_0, N_1,$\bar{N}$, $\bar{N}_0$,$\bar{N}_1$ les groupes associés à respectivement Σ^+,$\Sigma^+ \cap \Sigma_0$,Σ_1, Σ^-,$\Sigma^- \cap \Sigma_0$,Σ_{-1}. On remarquera que $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{n}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}$.
De manière générale, les objets reliés à l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ seront notés avec un indice 0 (W_0,N_0,K_0,...).

On peut ensuite caractériser les cônes invariants qui contiennent X_+ :

Théorème 1.3 *Soit $C \subset \mathfrak{q}$ un cône régulier H-invariant contenant X_+. On définit :*

$$\begin{aligned} C_{\min} &= \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Ad}(H)\mathbb{R}^+ X_+)} \\ C_{\max} &= \{X \in \mathfrak{q} \mid \forall Y \in C_{\min}, B(X,Y) \geq 0\} \end{aligned}$$

Alors $C_{\min} \subset C \subset C_{\max}$. En outre, $c = C \cap \mathfrak{a}$ est un cône régulier, W_0-invariant tel que $C^o = \operatorname{Ad}(H)c^o$. Réciproquement, tout cône régulier W_0-invariant de $\mathfrak{a}$ est l'intersection d'un cône régulier H-invariant qui contient X_+ avec $\mathfrak{a}$.

Pour finir, on introduit le produit de convolution et la transformée de Laplace sur les espaces symétriques ordonnés. On note $C(\mathcal{M}_+)^\#$ l'espace des fonctions continues sur $\mathcal{M}_+$, nulles en dehors, et H-invariantes. Muni du produit de convolution suivant,$C(\mathcal{M}_+)^\#$ est une algèbre :

$$f * h(x) = \int_{G/H} f(g^{-1} \cdot x) h(g \cdot \mathbf{o}) d\dot{g}$$

Ce produit est bien défini, car la fonction intégrée est nulle en dehors de l'intervalle compact $[\mathbf{o}, x]$.

Soit $x \in \mathcal{M}_+ \subset NA \cdot \mathbf{o}$. Il existe $n \in N$ et $a_H(x) \in \mathfrak{a}^+$ uniques tels que $x = na_H(x) \cdot \mathbf{o}$. Si $f \in C(\mathcal{M}_+)^\#$, on pose lorsque c'est défini :

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_{\mathcal{M}_+} a_H^{\rho-\lambda}(x) f(x) d^\times x$$

où $a_H^\lambda(x) = \exp(\langle \lambda, \log A_H(x) \rangle)$ pour $\lambda \in \mathfrak{a}$, et $d^\times x$ est une mesure invariante sur $\mathcal{M}$. La transformée de Laplace vérifie :

$$\mathcal{L}f(\lambda)\mathcal{L}h(\lambda) = \mathcal{L}(f * h)(\lambda).$$

2 Algèbre de Volterra

Sur $\mathcal{M}$, on appelle noyau de Volterra une fonction définie sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, continue sur $\{(x,y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mid x \leq y\}$ et nulle en dehors de cet ensemble. L'espace

$V(\mathcal{M})$ des noyaux de Volterra est muni d'une structure d'algèbre définie par le produit :

$$F \diamond G(x,y) = \int_{\mathcal{M}} F(x,z)G(z,y)d^\times z,$$

où $d^\times z$ désigne une mesure invariante sur $\mathcal{M}$. On remarquera que la fonction de $z \mapsto F(x,z)G(z,y)$ est intégrable car nulle en dehors de l'intervalle $[x,y]$, qui est compact.

L'espace des noyaux de Volterra invariants est défini par

$$V(\mathcal{M})^\# := \{F \in V(\mathcal{M}) \mid F(gx,gy) = F(x,y) \quad \forall (x,y,g) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times G\}.$$

On remarque que c'est une sous-algèbre de $V(\mathcal{M})$ qui s'identifie à l'algèbre de convolution $C(\mathcal{M}_+)^\#$ des fonctions continues et H-invariantes sur $\mathcal{M}_+$, via

$$F \mapsto (x \mapsto F(\mathbf{o},x)).$$

Le problème 4 de [4] propose d'étudier l'intégrité de cette algèbre. Nous allons prouver que c'est une conséquence facile d'un résultat analogue de [9] sur les distributions supportées par un cône convexe.

Lorsqu'elle existe, l'intégrale suivante définie la transformée d'Abel de $f \in C(\mathcal{M}_+)^\#$:

$$\mathcal{A}f(x) = a_H(x)^{-\rho} \int_N f(n\cdot x)dn$$

Rappelons en préliminaire les propriétés fondamentales de la transformée d'Abel :

Proposition 2.1 *L'application*

$$(C(\mathcal{M}_+)^\#, *) \to (C(c_{\max}), *) \quad f \mapsto (\mathcal{A}f) \circ \exp$$

est un homomorphisme d'algèbre injectif.

Preuve. D'après le théorème de convexité non-linéaire de Neeb (voir par exemple [7] page 105),

$$\forall X \in c_{\max}, \quad a_H(H\exp(X)\cdot \mathbf{o}) = \mathrm{conv}(W_+ \cdot X) + c_{\min}.$$

Ainsi, il existe δ strictement positive sur $c_{\max}$ telle que pour tout f H-invariante telle que $\mathcal{A}f$ existe,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}f(\exp(X)) &= e^{-\langle\rho,X\rangle} \int_N f(n\exp X)dn \\
&= e^{-\langle\rho,X\rangle} \int_{\{Y\in c_{\max} \mid X \in \mathrm{conv}(W_+\cdot Y)+c_{\min}\}} f(\exp(Y))\delta(Y)dY \\
&= e^{-\langle\rho,X\rangle} |W_+| \int_{\{Y\in\mathfrak{a}^+\cap(X-c_{\min})\}} f(exp(Y))\delta(Y)dY
\end{aligned}$$

Or $\mathfrak{a}^+ \cap (X - c_{\min})$ est compact et convexe. La compacité montre que $\mathcal{A}f$ est bien définie sur $C(\mathcal{M}_+)^\#$.

On suppose que f n'est pas identiquement nulle, et on considère le compact

$$K = \{x \in \mathfrak{a}^+ \mid \exp(X) \in \mathrm{supp} f \quad \text{et} \quad (X, X_+) \text{ minimal}\}.$$

La distance de K à la frontière de $c_{\max}$ est minimale en exactement un point X_o de K. Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f|_{B(X_o,\varepsilon)} \geq 0$. Enfin, on note que pour η assez petit, supp $f \cap (X_o + \eta X_+ - c_{\min}) \subset B(X_o, \varepsilon)$ par choix de Y. Ainsi,

$$\mathcal{A}f(\exp(X_o+\eta X_+)) = e^{-\langle \rho, Y+\eta X_+\rangle} \int_{B(X_o,\varepsilon)\cap(X_o+\eta X_+ - c_{\min})} f(\exp(Y))\delta(Y)dY > 0$$

car $f(\exp(Y))\delta(Y) \geq 0$ et non identiquement nulle sur l'ensemble d'intégration. Celà prouve l'injectivité.
Le fait $f \mapsto \mathcal{A}f(\exp(\cdot) \cdot \mathbf{o}$ soit un homorphisme d'algèbre est classique :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}f * \mathcal{A}h)(e^X \cdot \mathbf{o}) &= e^{-\langle \rho, X\rangle} \int_{c_{max}} \int_N \int_N f\left(ne^{X-Y}) \cdot \mathbf{o}\right) h\left(n'e^Y) \cdot \mathbf{o}\right) dY dndn' \\
&= e^{-\langle \rho, X\rangle} \int_{c_{max}} \int_N \int_N f\left(n'ne^{X-Y}) \cdot \mathbf{o}\right) h\left(n'e^Y) \cdot \mathbf{o}\right) dY dndn' \\
&= e^{-\langle \rho, X\rangle} \int_{c_{max}} \int_N \int_N f\left(n'(e^{-Y}ne^Y)e^{X-Y}) \cdot \mathbf{o}\right) \\
&\quad h\left(ne^Y) \cdot \mathbf{o}\right) e^{\langle 2\rho, Y\rangle} dY dndn' \\
&= e^{-\langle \rho, X\rangle} \int_N \int_{g\in G | g\cdot\mathbf{o}\in\mathcal{M}_+} f(g^{-1}ne^X \cdot \mathbf{o}))h(g\cdot\mathbf{o})d\dot{g}dn \\
&= \mathcal{A}(f * h)(e^X) \cdot \mathbf{o})
\end{aligned}$$

□

Or, d'après [9] page 32 :

Théorème 2.2 *L'algèbre (pour le produit de convolution) des distributions de support limité à gauche par un cône convexe Γ de $\mathbb{R}^n$ est intègre.*

En conséquence, $(C(\mathcal{M}_+)^\#, *)$ s'injecte dans l'algèbre des fonctions continues sur $c_{\max} \subset \mathbb{R}^r$ et nulles en dehors, qui est une sous-algèbre de l'algèbre intègre des distributions de support limité à gauche par $c_{\max}$. On a donc :

Théorème 2.3 *Les algèbres $(C(\mathcal{M}_+)^\#, *)$ et $(V(\mathcal{M})^\#, \diamond)$ sont intègres.*

3 Algèbres de Jordan

Nous allons réaliser une large famille d'espaces symétriques ordonnés comme à l'aide d'algèbres de Jordan euclidiennes. La théorie générale liée a ce type de structure est décrite en détail dans le livre de J. Faraut et A. Koranyi [6] auquel nous renvoyons pour toutes les notions non explicitées.

Nous désignons par $\mathbb{V}$ une *algèbre de Jordan* réelle de dimension finie n, *simple*, et *euclidienne*. Cela signifie que $\mathbb{V}$ est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une loi de multiplication commutative qui vérifie l'axiome

$$x(x^2y) = x^2(xy), \quad \forall x, y \in V,$$

que $\mathbb{V}$ n'admet aucun idéal non trivial, et que $\mathbb{V}$ est doté d'une forme bilinéaire associative définie-positive.

On note L la *représentation régulière* de $\mathbb{V}$, P sa *représentation quadratique*, et $\{.,.,.\}$ le *système triple* associé, à savoir :

$$\begin{array}{rcl} L(x)y & = & xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{V}, \\ P(x) & = & 2L(x)^2 - L(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{V}, \\ \{x, y, z\} & = & x(yz) - y(xz) + (xy)z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{V}. \end{array}$$

L'algèbre $\mathbb{V}$ possède un élément neutre e. Etant donné un élément x de $\mathbb{V}$, le sous espace $\mathbb{R}[x]$ de $\mathbb{V}$ engendré par e et les différentes puissances de x est une sous-algèbre associative de $\mathbb{V}$. Le *rang* de $\mathbb{V}$ est défini comme le maximum de $\dim \mathbb{R}[x]$, pour $x \in \mathbb{V}$. On définit la *trace* $\operatorname{tr}(x)$ et le *déterminant* $\det(x) = \Delta(x)$ d'un élément x comme étant respectivement la trace et le déterminant de la restriction à $\mathbb{R}[x]$ de $L(x)$. La constante d est un entier défini par la relation

$$n = r + r(r-1)\frac{d}{2}.$$

Lorsque un élément x de $\mathbb{V}$ a un déterminant non nul, il possède un inverse dans $\mathbb{R}[x]$ qui définit son *inverse* dans $\mathbb{V}$. Nous désignerons par

$$\mathbb{V}^\times = \{x \in \mathbb{V} : \det(x) \neq 0\},$$

l'ensemble des inversibles de $\mathbb{V}$. On note aussi :

$$j : \mathbb{V}^\times \to \mathbb{V}^\times \quad x \mapsto -x^{-1}.$$

Il existe, à la multiplication par un scalaire positif près, une unique forme bilinéaire, associative et définie positive. On fait le choix d'une telle forme :

$$\tau(x, y) := \operatorname{tr}(xy), \quad \forall x, y \in V.$$

Si $g \in \mathfrak{gl}(V)$ est une application linéaire de $\mathbb{V}$, nous noterons g' son adjoint pour la forme τ.

Cela nous amène à la définition du *groupe de structure* de $\mathbb{V}$:

$$\operatorname{Str}(\mathbb{V}) := \{g \in \operatorname{GL}(\mathbb{V}) : \forall x \in \mathbb{V}, \quad gP(x)g' = P(g \cdot x)\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\operatorname{GL}(\mathbb{V})$, et un groupe de Lie réductif. Il contient le groupe des *automorphismes* de $\mathbb{V}$:

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{V}) = \{g \in \operatorname{Str}(\mathbb{V}) : \forall x, y \in \mathbb{V} \quad g \cdot (xy) = (g \cdot x)(g \cdot y)\},$$

qui en est un sous-groupe compact maximal.

La composante connexe de l'élément neutre dans $\mathrm{Str}(\mathbb{V})$ est $G_0 = \mathrm{Str}(\mathbb{V})_o$, celle de $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ est notée $K_0 = \mathrm{Aut}(\mathbb{V})_o$. Ces groupes sont d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}_0$, naturellement plongées dans $\mathfrak{gl}(\mathbb{V})$. L'involution θ définie sur $\mathfrak{g}_0$ par $\theta(X) = -X'$ est une involution de Cartan. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathfrak{k}_0$, le sous-espace correspondant à -1 est $\mathfrak{p}_0 = L(V)$.

Etant donnés un élément x de $\mathbb{V}$ et un réel λ, nous notons

$$\mathbb{V}(x, \lambda) = \{y \in \mathbb{V} \mid xy = \lambda x\}.$$

Soit c un *idempotent* de $\mathbb{V}$, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{V}$ tel que $c^2 = c$. On a :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(c, 1) \oplus \mathbb{V}(c, 1/2) \oplus \mathbb{V}(c, 0).$$

Cette somme directe est orthogonale par rapport à τ. On l'appelle *décomposition de Peirce* relative à l'idempotent c. A partir de l'idempotent c, on est en mesure de définir pour chaque $z \in \mathbb{V}(c, 1/2)$, l'*opérateur de Frobenius* :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{c,z} &= \exp(L(z) + 2[L(z), L(c)]) \\ &= \exp(2\{c, z, .\}) \\ &= I + 2\{c, z, .\} + 2\{c, z, .\}^2. \end{aligned}$$

En fixant $x = x_0 + x_{1/2} + x_1$ dans $\mathbb{V}$, avec x_λ sa composante dans $\mathbb{V}_\lambda$, on obtient pour $y = \Upsilon_{c,z}(x)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_{1/2} &= 2zx_1 + x_{1/2} \\ y_0 &= 2(e - c)(z(zx_1)) + 2(e - c)(zx_{1/2}) + x_0. \end{aligned}$$

Ces résultats sont mentionnés dans [6] aux pages 106 et 107. Citons ensuite une propriété importante de ces opérateurs :

Proposition 3.1 *Soit $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ dans $\mathbb{V}$, avec $x_\lambda \in \mathbb{V}_\lambda$, et x_1 inversible dans $\mathbb{V}_1$. Alors il existe un $z \in V_{1/2}$ et un $y_0 \in V_0$, uniques tels que :*

$$x = \Upsilon_{c,z}(x_1 + y_0).$$

En outre, $z = 2x_1^{-1}x_{1/2}$ et $y_0 = x_0 - 2c(x_{1/2}(x_1^{-1}x_{1/2}))$.

Nous faisons le choix pour $\mathbb{V}$ d'un repère de Jordan $(c_i)_{i=1}^r$, voir [6], §IV.2 p. 68. C'est un système de r idempotents minimaux deux à deux orthogonaux. Soit i un entier entre 1 et r. D'après la proposition IV.1.1 de la même référence, les sous-espaces suivants sont des sous-algèbres euclidiennes de $\mathbb{V}$:

$$\mathbb{V}_i = \mathbb{V}(c_1 + ... + c_i, 1)\,;\, \mathbb{V}^*_{r-i} = V(c_1 + ... + c_i, 0).$$

On pose $\mathfrak{a} = L(\mathbb{R}c_1 + ... + \mathbb{R}c_r) \subset \mathfrak{p}_0$. C'est un sous-espace de Cartan dans $\mathfrak{p}_0$. Nous définissons l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_0$ par

$$\mathfrak{n}_0 = \bigoplus_{1 \le i < j \le r} \{\{c_i, z, .\} : z \in \mathbb{V}(c_i, 1/2) \cap \mathbb{V}(c_j, 1/2)\}.$$

Les sous-groupes de G_0 d'algèbres respectives $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}_0$ sont notés A et N_0. Enfin, M_0 désigne le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K_0.

La composée de la projection orthogonale π_i de $\mathbb{V}$ sur $\mathbb{V}_i$ (resp. π_i^* de $\mathbb{V}$ sur $\mathbb{V}_i^*$) et du déterminant de $\mathbb{V}_i$ (resp. $\mathbb{V}_i^*$) est notée Δ_i (resp. Δ_i^*). Posons

$$\mathbb{V}^{\#} = \{x \in \mathbb{V} \mid \Delta_1(x)...\Delta_r(x) \neq 0\}.$$

Fixons ensuite une détermination du logarithme sur un domaine complexe qui contient les réels privés de 0 : cette détermination sert désormais à la définition des puissances complexes de réels non nuls. Pour x dans $\mathbb{V}^{\#}$, nous pouvons alors construire la *fonction puissance* de l'algèbre $\mathbb{V}$:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1(x)^{s_1-s_2}...\Delta_{r-1}(x)^{s_{r-1}-s_r}\Delta_r(x)^{s_r},$$

où $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_r)$ est un r-uplet complexe. Notons $\mathbf{s}^* = (s_r, ..., s_1)$. Les principales propriétés de ces fonctions puissances peuvent être résumées en :

Proposition 3.2 *Fixons $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$. La fonction puissance $x \mapsto \Delta_{\mathbf{s}}(x)$ satisfait les propriétés suivantes :*

- *Puissance de l'inverse : Pour x inversible,*

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x^{-1}) = \Delta^*_{-\mathbf{s}^*}(x). \tag{1}$$

- *Action du parabolique minimal M_0AN_0 : pour tout $(m, a, n) \in M_0 \times A \times N_0$,*

$$\Delta_{\mathbf{s}}(man \cdot x) = \chi_{\mathbf{s}}(a)\Delta_{\mathbf{s}}(x) \tag{2}$$

où $\chi_{\mathbf{s}}$ est le caractère de A défini pour $a = P(\sum_{i=1}^r a_i c_i) \in A$ par :

$$\chi_{\mathbf{s}}(a) := a_1^{2s_1}...a_r^{2s_r}.$$

- *Action du groupe G_0 : pour tout $(g, x) \in G_0 \times \mathbb{V}$,*

$$\Delta(g \cdot x) = Det(g)^{\frac{r}{n}}\Delta(x). \tag{3}$$

Tous ces résultats figurent dans [6]. La puissance de l'inverse est l'objet de la proposition VII.1.5(ii), l'action du sous-groupe parabolique minimal se déduit de la proposition VI.3.10 et de la remarque de la page 224, et l'action du groupe G_0 est décrite dans la proposition III.4.3.

Enfin, nous allons introduire l'équivalent dans les algèbres de Jordan de la fonction gamma d'Euler et des fonctions hypergeométriques de Gauss.

A l'image de la fonction gamma d'Euler, on définit la *fonction gamma* du cône Ω par

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) = \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(x)}\Delta_{\mathbf{s}}(x)d^\times x,$$

où $d^\times x$ désigne toujours la mesure invariante $\Delta(x)^{-\frac{n}{r}}dx$. Cette intégrale converge absolument si et seulement si

$$\mathrm{Re}(s_j) > (j-1)\frac{d}{2} \quad \forall j \in \{1, ..., r\}.$$

A cette condition, $\Gamma_\Omega(\mathbf{s})$ coïncide avec le produit suivant de fonctions gamma d'Euler, qui donne également le prolongement méromorphe de $\Gamma_\Omega(\mathbf{s})$:

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(s_j - (j-1)\frac{d}{2}\right).$$

De même, on définit une fonction *Beta généralisée* , par l'intégrale qui suit, avec $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^r$:

$$B_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \int_{\Omega \cap (e-\Omega)} \Delta_{\mathbf{s}-\frac{n}{r}}(x) \Delta_{\mathbf{t}-\frac{n}{r}}(e-x) dx.$$

L'intégrale est absolument convergente pour

$$\mathrm{Re}(s_j) > (j-1)\frac{d}{2}, \text{ et } \mathrm{Re}(t_j) > (j-1)\frac{d}{2}, \quad \forall j \in \{1, ..., r\}.$$

Sur ce domaine, elle vaut :

$$B_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{s})\Gamma_\Omega(\mathbf{t})}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s}+\mathbf{t})}.$$

Cette formule permet le prolongement méromorphe de B_Ω. On introduit enfin les fonctions hypergéométriques ${}_2F_1$ K-invariantes : soit $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^r \mid m_1 \geq ... \geq m_r \geq 0$ (on note $\mathbf{m} \geq 0$), on pose pour $x \in \Omega$,

$$\phi_{\mathbf{m}}(x) = \int_K \Delta_{\mathbf{m}}(k \cdot x) dk, \quad (\mathbf{s})_{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{s}+\mathbf{m})}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s})}.$$

On considère alors pour $x \in \Omega \cap (e - \Omega)$, et $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{(a)_{\mathbf{m}}(b)_{\mathbf{m}}}{(c)_{\mathbf{m}}} \frac{d_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \phi_{\mathbf{m}}(x).$$

où $d_{\mathbf{m}}$ désigne la dimension du sous-espace des polynômes à coefficients réels engendré par $\{x \mapsto \Delta_{\mathbf{m}}(g \cdot x) \mid g \in G_0\}$. Ces fonctions sont font l'objet des paragraphes XV.1 et XV.3 de [6]. La représentation intégrales suivante y est prouvée dans la proposition XV.1.4 :

Proposition 3.3 *Pour* $\mathrm{Re}(b) > (r-1)\frac{d}{2}$ *et* $\mathrm{Re}(c-b) > (r-1)\frac{d}{2}$ *et* $z = g \cdot e \in \Omega \cap (e - \Omega)$,

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_{\Omega \cap (e-\Omega)} \Delta(x)^{b-\frac{n}{r}} \Delta(e-x)^{c-b-\frac{n}{r}} \Delta(e - g \cdot x)^{-a} dx$$

Afin de simplifier certaines formules nous emploieront les notations suivantes, qui consistent à définir les fonctions spéciales par rapport à la mesure euclidienne dx plutôt que la mesure invariante $d^\times x$:

Notation 4 *Pour une algèbre de Jordan euclidienne $\mathbb{V}$, pas nécessairement simple, on pose :*

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_\Omega(\mathbf{s}) &= \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(x)} \Delta_{\mathbf{s}}(x) dx \\
\tilde{B}_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{t}) &= \int_{\Omega \cap (e-\Omega)} \Delta_{\mathbf{s}}(x) \Delta_{\mathbf{t}}(e-x) dx \\
{}_2\tilde{F}_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma_\Omega(c)}{\Gamma_\Omega(b)\Gamma(c-b)} \int_{\Omega\cap(e-\Omega)} \Delta(x)^b \Delta(e-x)^{c-b} \Delta(e-g\cdot x)^{-a} dx
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mathbb{V}$ est simple, on a les relations :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_\Omega(\mathbf{s}) &= \Gamma_\Omega\left(\frac{n}{r} + \mathbf{s}\right) \\
\tilde{B}_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{t}) &= B_\Omega\left(\mathbf{s} + \frac{n}{r}, \mathbf{t} + \frac{n}{r}\right) = \frac{\Gamma_\Omega\left(\mathbf{s} + \frac{n}{r}\right) \Gamma_\Omega\left(\mathbf{t} + \frac{n}{r}\right)}{\Gamma_\Omega\left(\mathbf{s} + \mathbf{t} + \frac{2n}{r}\right)} \\
{}_2\tilde{F}_1(a,b;c;z) &= {}_2F_1\left(a, b + \frac{n}{r}; c + \frac{2n}{r}; z\right)
\end{aligned}$$

4 Algèbre de Jordan euclidienne involutive

Une *algèbre de Jordan euclidienne involutive* $(\mathbb{V}, \alpha)$ est la donnée d'une algèbre de Jordan euclidienne $\mathbb{V}$ et d'un automorphisme involutif d'algèbre de Jordan. Les sous-espaces propres de α sont :

$$\mathbb{V}_0 = \{x \in \mathbb{V} \mid \alpha(x) = x\}, \quad \mathbb{V}_1 = \{x \in \mathbb{V} \mid \alpha(x) = -x\}.$$

Notation 5 *Tous les objets relatifs à V_0 seront notés avec un 0 en indice (Ω_0,r_0,...).*

On associe à l'involution α le groupe

$$G_\alpha := \{g \in \mathrm{Caus}(\mathbb{V}) : (-\alpha) \circ g \circ (-\alpha) = g\}.$$

L'algèbre $\mathbb{V}$ est *irréductible* s'il n'existe pas de décomposition non triviale

$$(\mathbb{V}, \alpha) = (\mathbb{V}' \oplus \mathbb{V}'', \alpha' \oplus \alpha'').$$

La classification des algèbres de Jordan euclidiennes involutives irréductibles comporte quatre familles ([8] et [3]) :

• **Type I.** $\mathbb{V}$ simple et $\mathbb{V}_0$ non simple, $r = r_0$.
Les involutions de type I sont les $\alpha = P(e - 2c)$ où un idempotent $c \neq 0, e$.

• **Type II.** $\mathbb{V}$ simple et $\mathbb{V}_0$ simple, $r = r_0$.
Les involutions de type II sont données par $\alpha((x_{ij})_{1\le i,j\le r}) = (\alpha_0(x_{ij}))_{1\le i,j \le r}$, où $\mathbb{V} = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{F})$ et α_0 est un automorphisme intérieur de $\mathbb{F}$.

• **Type III.** $\mathbb{V}$ simple et $\mathbb{V}_0$ simple, $r = 2r_0$.
Les involutions de type III sont les $\alpha(x) = -JxJ$ avec $\mathbb{V} = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_{r_0} \\ -1_{r_0} & 0 \end{pmatrix}$.

• **Type IV.** $\mathbb{V}$ non simple et $\mathbb{V}_0$ simple, $r = 2r_0$.
Dans ce cas, $\mathbb{V} = W \oplus W$ où W est une algèbre simple et $\alpha(u, v) = (v, u)$.

On utilisera la comparaison suivante entre Δ_0 et Δ :

Lemme 4.1 *Soit $x_0 \in \Omega_0$. Alors :*$\Delta(x_0) = \Delta_0(x_0)^{\frac{r}{r_0}}$*, de même, pour $x_0 \in \mathbb{V}_0$,* $\mathrm{tr}(x_0) = \frac{r}{r_0}\mathrm{tr}_0(x_0)$.

Preuve. Soit $(c_1, ..., c_{r_0})$ un repère de Jordan de $\mathbb{V}_0$. Comme $\mathrm{Aut}(\mathbb{V}_0) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{V})$, il suffit de prouver ce résultat pour $x_0 = \sum_{k=1}^{r_0} \lambda_k c_k$. D'après la preuve du théorème 1.6.1 de [2], deux situations sont possibles :
(1) $r = r_0$ et dans ce cas $(c_i)_{i=1}^{r}$ est un repère de Jordan de $\mathbb{V}$. En conséquence, $\Delta(x_0) = \lambda_1 ... \lambda_r = \Delta_0(x_0)$.
(2) $r = 2r_0$. Dans ce cas il existe un repère de Jordan de $\mathbb{V}$ $(f_1, ..., f_r, \alpha(f_1)...\alpha(f_r))$ tel que $c_i = f_i + \alpha(f_i)$. On a donc $\Delta(x_0) = \lambda_1^2 ... \lambda_r^2 = \Delta_0(x_0)^2$.
L'assertion sur la trace se déduit de la relation $\Delta(\exp(x)) = \exp(\mathrm{tr}(x))$. $\square$

5 Espace symétrique ordonné de type Makarevič

Le *groupe conforme* de l'algèbre de Jordan $\mathbb{V}$ est le groupe $\mathrm{Conf}(\mathbb{V})$ des transformations rationnelles de $\mathbb{V}$ engendré par les translations

$$\tau_x : \mathbb{V} \to \mathbb{V} \quad y \mapsto x + y, \qquad x \in \mathbb{V},$$

l'inversion j et le groupe de structure $\mathrm{Str}(\mathbb{V})$.

Le *groupe causal* de l'algèbre $\mathbb{V}$ est le sous-groupe $\mathrm{Caus}(\mathbb{V})$ d'ordre 2 de $\mathrm{Conf}(\mathbb{V})$ engendré par les translations, l'inversion j et le groupe du cône $G(\Omega)$.

Les champs de vecteurs qui composent l'algèbre de Lie $\mathfrak{conf}(\mathbb{V})$ sont les

$$\xi(x) = u + Tx - P(x)v \qquad u, v \in \mathbb{V}, T \in \mathfrak{str}(\mathbb{V}).$$

Le sous-groupe affine est défini par $\mathrm{Aff}(\mathbb{V}) = \mathrm{Str}(\mathbb{V}) \ltimes \mathbb{V}$ où $\tau_{\mathbb{V}}$ est identifié à $\mathbb{V}$. Ce groupe est un sous-groupe parabolique maximal de $\mathrm{Conf}(\mathbb{V})$. Ainsi, la variété homogène $\mathbb{V}^c = \mathrm{Conf}(\mathbb{V})/\mathrm{Aff}(\mathbb{V})$ est compacte, et réalise une compactification de $\mathbb{V}$ dite *compactification conforme*, via le plongement suivant, d'image dense :

$$\imath : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^c \quad x \mapsto (\tau_x \circ j)\mathrm{Aff}(\mathbb{V}).$$

On fixe une algèbre de Jordan involutive irréductible $(\mathbb{V}, \alpha)$, et on abrège $G := G_\alpha$. On note

$$H = \{g \in MG \mid g \cdot e = e\}.$$

L'orbite $\mathcal{M} = G_\alpha \cdot e \approx G/H$ est un ouvert de la compactification conforme $\mathbb{V}^c$. L'espace homogène $\mathcal{M}$ est un espace symétrique relativement à l'involution de G :

$$\tau(g) = (-j) \circ g \circ (-j).$$

L'involution définie par $\theta(g) = j \circ g \circ j$ définit une involution de Cartan sur G qui commute à τ. On montre que $\mathcal{M}$ est un espace symétrique ordonné. On le munit de la structure causale déterminée par $C_x = -\bar{\Omega}$, et on montre ([1], proposition 5.2) :

$$\mathcal{M}_+ = (e - \bar{\Omega}) \cap \{x \in \mathbb{V} \mid x_0 \in \Omega_0\}$$

Dans cette réalisation, le point base $\mathbf{o}$ coïncide avec l'unité e. Les champs de vecteurs qui composent les algèbres de Lie décritent dans la section 1 sont :

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{conf}(\mathbb{V}) & = & \{\xi_{u,v,T} = u + Tx - P(x)v \mid u, v \in \mathbb{V}, T \in \mathfrak{str}(\mathbb{V})\}, \\
\mathfrak{g} & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathrm{Conf}(\mathbb{V}) \mid \alpha \circ T \circ \alpha = T; \quad u, v \in \mathbb{V}^1\}, \\
\mathfrak{h} & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid T^* = -T, \quad u = v\} = \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid d\tau(\xi_{u,v,T}) = \xi_{u,v,T}\}, \\
\mathfrak{q} & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid T^* = T, \quad u = -v\} = \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid d\tau(\xi_{u,v,T}) = -\xi_{u,v,T}\}, \\
\mathfrak{k} & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid T^* = -T, \quad u = -v\} = \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid d\theta(\xi_{u,v,T}) = \xi_{u,v,T}\}, \\
\mathfrak{p} & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid T^* = T, \quad u = v\} = \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid d\theta(\xi_{u,v,T}) = -\xi_{u,v,T}\},
\end{array}$$

On pose $X_+(x) = \xi_{0,0,\mathrm{Id}}(x) = x$, et on vérifie que X_+ est un élément causal au sens du théorème 1.2. Les composantes de la graduation associée sont :

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{g}_0 & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid T \in \mathrm{Str}(\mathbb{V}^0), \quad u = v = 0\} \\
\mathfrak{g}_1 & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid T = 0, \quad v = 0\} = \mathfrak{n}_1, \\
\mathfrak{g}_{-1} & = & \{\xi_{u,v,T} \in \mathfrak{g} \mid T = 0, \quad u = 0\} = \mathfrak{n}_{-1},
\end{array}$$

On remarque que g_0 s'identifie au groupe de structure de $\mathbb{V}^0$. On définit tous les groupes et algèbres associés comme dans la section 3. En particulier, Le choix d'un repère de Jordan dans $\mathbb{V}_0$ détermine $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$, et le choix de $\mathfrak{a}^+$ détermine la partie nilpotente de la décomposition d'Iwasawa de G : $N = N_1 \ltimes N_0$.

6 Volume d'un intervalle

Suivant le problème 6 de [4], on se propose détudier le comportement à l'infini d'un intervalle pour la mesure invariante. On commence par décrire l'intervalle $[e, x]$ dans la réalisation de Makarevič :

Lemme 6.1 *Si $\mathcal{M}$ est un espace ordonné de Makarevič et $y \in \mathcal{M}_+$, alors*

$$[e, y] = (y + \Omega) \cap (e - \Omega)$$

Preuve. On considère $y \in \mathbb{V}_0$ tel que $y \geq e$, donc $y \in \bar{\Omega}_0 \cap (e - \Omega_0)$. Alors si $x \in \mathbb{V}$,

$$\begin{aligned} e \leq x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad x_0 \in \Omega_0, \quad e - x \in \Omega, \quad e \leq P(x_0^{-1/2})(y - x_1) \\ &\Leftrightarrow \quad x_0 \in \Omega_0, \quad e - x \in \Omega, \quad e - P(x_0^{-1/2})(a - x_1) \in \Omega \\ &\Leftrightarrow \quad e - x \in \Omega, \quad x - y \in \Omega. \quad \square \end{aligned}$$

Si $\mathcal{V}(y)$ désigne le volume de l'intervalle $[e, y]$ pour la mesure invariante $\Delta(x_0)^{-\frac{n}{r}} dx_0 dx_1$, on a :

Lemme 6.2 *Soient $T = \{x \in \mathbb{V} \mid \mathrm{tr}(x) \leq 1\}$ et π_0 la projection orthogonale de $\mathbb{V}$ sur $\mathbb{V}_0$. On a les inclusions suivantes :*

$$\Omega \cap \pi_0^{-1}(e/r - \Omega_0) \subset T \cap \Omega \subset \Omega \cap (e - \Omega) \subset \Omega \cap \pi_0^{-1}(e - \Omega_0)$$

Preuve. On note que $\pi_0(x) = \frac{1}{2}(x + \alpha(x))$.
(i). Si $x = (y_0 + y_1)^2 \in \Omega$ alors $x + \alpha(x) = y_0^2 + y_1^2 \in \Omega_0$, donc $\Omega \cap (e - \Omega) \subset \Omega \cap \pi_0^{-1}(e - \Omega_0)$.
(ii). $T \cap \Omega$ est $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$-invariant, il suffit de montrer que $x = \sum_{k=1}^r \lambda_k c_k \in e - \Omega$ pour $\lambda_r \geq ... \geq \lambda_1 > 0$ et $\lambda_1 + ... + \lambda_r \leq 1$. Or on a $1 - \lambda_r \geq \lambda_1 + ... + \lambda_{r-1} \geq 0$, donc $0 \leq 1 - \lambda_r \leq ... \leq 1 - \lambda_1$ d'où $x \in e - \Omega$.
(iii). Si $x \in \Omega \cap \pi_0^{-1}(e/r - \Omega_0)$, alors

$$r_0/r = \mathrm{tr}_0(e/r) \geq \mathrm{tr}_0(x_0) = \frac{r_0}{r} \mathrm{tr}(x_0)$$

ce qui prouve la dernière inclusion. $\square$

Lemme 6.3 *On considère la fonction définie sur Ω_0 par*

$$F(x_0) = k_\Omega B_{\Omega_0}\left(\frac{n}{r_0}, \frac{n_0}{r_0}\right) \Delta_+(e - x_0)^{\frac{n}{r_0}} \, {}_2F_1^0\left(\frac{n}{r_0}, \frac{n_0}{r_0}; \frac{n + n_0}{r_0}; e - x_0\right).$$

On a pour tout $y_0 \in \mathcal{M}_+ \cap \mathbb{V}_0$:

$$F\left(\frac{r y_0}{1 + (r-1) y_0}\right) \leq \mathcal{V}(y_0) \leq F(y_0)$$

Preuve. Pour tout $y_0 \in \mathcal{M}_+ \cap \mathbb{V}_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(y_0) &= \int_{(y_0 + \Omega) \cap (e - \Omega)} \Delta(x_0)^{-\frac{n}{r}} dx_0 dx_1 \\ &= \int_{\Omega \cap (e - y_0 - \Omega)} \Delta(y_0 + x_0)^{-\frac{n}{r}} dx_0 dx_1 \\ &= \int_{\Omega \cap (e - \Omega)} \Delta\left(y_0 (e - y_0)^{-1} + x_0\right)^{-\frac{n}{r}} dx_0 dx_1 \\ &= \int_{\Omega_0 \cap (e - \Omega_0)} \int_{\{x_1 \mid x_0 + x_1 \in \Omega \cap (e - \Omega)\}} dx_1 \Delta\left(y_0 (e - y_0)^{-1} + x_0\right)^{-\frac{n}{r}} dx_0 \end{aligned}$$

D'après le lemme qui précède, d'une part

$$\mathcal{V}(y_0) \leq \int_{\Omega_0\cap(e-\Omega_0)} \int_{\{x_1|x_0+x_1\in\Omega\}} dx_1 \Delta \left(y_0(e-y_0)^{-1}+x_0\right)^{-\frac{n}{r}} dx_0 =: F(y_0),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(y_0) &\geq \int_{\Omega_0\cap(e/r-\Omega_0)} \int_{\{x_1|x_0+x_1\in\Omega\}} dx_1 \Delta \left(y_0(e-y_0)^{-1}+x_0\right)^{-\frac{n}{r}} dx_0 \\
&\geq \int_{\Omega_0\cap(e-\Omega_0)} \int_{\{x_1|x_0+x_1\in\Omega\}} dx_1 \Delta \left(ry_0(e-y_0)^{-1}+x_0\right)^{-\frac{n}{r}} dx_0 \\
&\geq F\left(\frac{ry_0}{1+(r-1)y_0}\right)
\end{aligned}$$

Or d'après [1] lemme 5.4,

$$\int_{\{x_1|x_0+x_1\in\Omega\}} dx_1 = k_\Omega \Delta(x_0)^{\frac{n_1}{r}}.$$

avec

$$k_\Omega := \frac{\tilde{\Gamma}_\Omega(0)}{\tilde{\Gamma}_{\Omega_0}\left(\frac{n_1}{r_0}\right)}.$$

En tenant compte de $\Delta_0 = \Delta^{\frac{r_0}{r}}$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
F(y_0) &= k_\Omega \int_{\Omega_0\cap(e-\Omega_0)} \Delta \left(y_0(e-y_0)^{-1}+x_0\right)^{-\frac{n}{r_0}} \Delta(x_0)^{\frac{n_1}{r_0}} dx_0 \\
&= k_\Omega \tilde{B}_{\Omega_0}\left(\frac{n_1}{r_0},0\right) \Delta_0(e-y_0)^{\frac{n}{r_0}} \, {}_2F_1^0\left(\frac{n}{r_0},0;\frac{n_1}{r_0};e-y_0\right)
\end{aligned}$$

d'après la preuve de la proposition XV.3.4 de [6].□

On pose :

$$\begin{aligned}
a(t,r) &= (1-t)^n t^{-(r^2-1)\frac{d}{8}} \log\frac{1}{t} \quad \text{si r impair}, \\
a(t,r) &= (1-t)^n t^{-r^2\frac{d}{8}} \quad \text{si r pair}.
\end{aligned}$$

Théorème 6.4 *Pour tout $t \in]0,1[$, on a :*
• *$\mathcal{V}(te) \asymp a(t,r)$ si $\mathcal{M}$ est de type II,III ou IV.*
• *$\mathcal{V}(te) \asymp a(t,p)a(t,q)$ si $\mathcal{M}$ est de type I, avec p et q les rangs des algèbres simples qui décomposent $\mathbb{V}_0$.*

Preuve. On applique au résultat du lemme précèdent la proposition4.4 de [10] qui donne le comportement de F. □

On obtient la transformée de Laplace de $\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}$ en particularisant les propositions 5.4 et 5.5 de [1], et celle de $\mathcal{V}$ en boservant que $\mathcal{V} = \mathbf{1}_{\mathcal{M}_+} * \mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}$:

Proposition 6.5 *Les transformées de Laplace $\mathcal{L}\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}$ et $\mathcal{L}\mathcal{V}$ s'étendent méromorphiquement à $\mathbb{C}^r$ et valent pour $\mu \in \mathbb{C}^r$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}(\rho+\mu) &= c_0 \frac{\tilde{\Gamma}_{\Omega_0}\left(\frac{n_1}{r_0}\right)}{\tilde{B}_{\Omega_0}\left(-\mu, \frac{n_1}{r_0}\right)} \\
\mathcal{L}\mathcal{V}(\rho+\mu) &= \left(\mathcal{L}\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}(\rho+\mu)\right)^2
\end{aligned}$$

Remarque 6.1 *La fonction $\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}$ (et donc $\mathcal{V}$) est solution fondamentale d'un opérateur différentiel invariant si et seulement si $\mathcal{L}\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}(\mu)$ est l'inverse d'un polynôme. D'après les formules précédentes, c'est toujours le cas en type III et IV, cela équivaut à r impair ou d pair dans le cas du type II. Dans le cas du type 1, si on note p et q les rangs des deux algèbres simples qui décomposent $\mathbb{V}_0$, on obtient la condition suivante : (d pair ou $p+q$ pair) et ($p+q$ divise $2dpq$).*

7 Equation de Volterra

Nous allons suivre la méthode historique de Riesz, dans le cas du cône de Lorentz, afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Volterra. Ce problème est exposé dans [4], problème 8. On utilisera les distributions de Riesz sur les cônes symétriques ordonnés pour estimer les puissances de convolution de la fonction caractéristique de l'avenir du point base $\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}^{*n}$, à défaut d'obtenir une expression explicite : en effet, à la différence du cas classique, ces distributions ne forment pas un groupe à un paramètre pour la convolution.

On introduit un noyau semblable à celui de [3] :

$$R_\nu : \mathcal{M}_+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{\tilde{\Gamma}_\Omega(2\nu)} \left(\frac{\Delta(e-x)^2}{\Delta(x_0)}\right)^\nu$$

Suivant [3], on remarque que ce noyau est H-invariant et croissant. Le lemme suivant donne une réponse au problème 7 de [4] : il nous permettra, dans la preuve du résultat suivant, d'estimer les puissances de la fonction caractéristique de l'avenir du point base.

Lemme 7.1 *Soit $z \in \mathcal{M}_+$. Alors pour tout $x \in \mathcal{M}_+$ tel que $y \leq z$, on a :*

$$\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+} * R_\nu(y) \leq c_\Omega(z) R_{\nu+\frac{n}{2r}}(y)$$

où $c_\Omega(z) = \tilde{\Gamma}_\Omega(0)\,\Delta(z_0)^{-\frac{n}{2r}}$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\mathcal{M}_+} * R_\nu(y) &= \frac{1}{\tilde{\Gamma}_\Omega\left(2\nu\right)} \int_{y+\Omega\cap(e-\Omega)} \Delta(x_0)^{-\nu-\frac{n}{r}} \Delta(e-x)^{2\nu} dx \\
&\leq \frac{1}{\tilde{\Gamma}_\Omega\left(2\nu\right)} \Delta(y_0)^{-\nu-\frac{n}{r}} \int_{y+\Omega\cap(e-\Omega)} \Delta(e-x)^{2\nu} dx \\
&\leq \frac{1}{\tilde{\Gamma}_\Omega\left(2\nu\right)} \Delta(y_0)^{-\nu-\frac{n}{r}} \int_{\Omega\cap(e-y-\Omega)} \Delta(e-y-x)^{2\nu} dx \\
&\leq \frac{1}{\tilde{\Gamma}_\Omega\left(2\nu\right)} \Delta(y_0)^{-\nu-\frac{n}{r}} \frac{1}{\tilde{B}_\Omega\left(\frac{0}{,}2\nu\right)} \Delta(e-y)^{2\nu+\frac{n}{r}} \\
&\leq \tilde{\Gamma}_\Omega\left(0\right) \Delta(z_0)^{-\frac{n}{2r}} \frac{1}{\tilde{\Gamma}_\Omega\left(2\nu+\frac{n}{r}\right)} \Delta(y_0)^{-\nu-\frac{n}{2r}} \Delta(e-y)^{2\nu+\frac{n}{r}} \\
&\leq \tilde{\Gamma}_\Omega(0) \Delta(z_0)^{-\frac{n}{2r}} R_{\nu+\frac{n}{2r}}(y)
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule du théorème VII.1.7 de [6]. □

Théorème 7.2 *Soient $A, B \in C(\mathcal{M}_+)^\#$. Alors la série $C = \sum_{k=1}^{\infty} A^{*k}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{M}_+$, et l'équation de Volterra $A*X+B = X$ possède une unique solution $X = C*B+B \in C(\mathcal{M}_+)^\#$.*

Preuve. Soit K un compact de $\mathcal{M}_+$: il existe alors un ensemble fini $\{z_1, ..., z_m\}$ tel que K soit contenu dans l'union des intervalles $[e, z_i]$. On pose

$$c = \left(\max_{i=1..m} c_\Omega(z_i) \left(\frac{\Delta(e-z_i)^2}{\Delta((z_i)_0)} \right)^{\frac{n}{2r}} \right) \sup_{x\in K} |A(x)|.$$

En remarquant que $R_0 = \tilde{\Gamma}_\Omega\left(0\right) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_+}$, et en utilisant le lemme précédent, on a pour tout $x \in K$ et $j \in \mathbb{N}^*$,

$$|A^{*j}(x)| \leq \frac{c^j}{\tilde{\Gamma}_\Omega\left((j-1)\frac{n}{2r}\right)}.$$

En conséquence, la série $C = \sum_{k=1}^{\infty} A^{*k}$ converge uniformḿement sur K.
La fonction $X = C*B+B$ est clairement solution de $A*X+B = X$. Si D est une solution de cette équation, alors $A*(C-D) = C-D$, et par conséquent $A^{*j}*(C-D) = (C-D)$. En utilisant l'estimation précedente et en faisant tendre j vers l'infini, on obtient $C = D$. □

Références

[1] S. Ben Saïd, *Weighted Bergman spaces on bounded symmetric domains*, Pacific J. of Math. **206** 1 (2002)

[2] W. Bertram and J. Hilgert, *Hardy spaces and analytic continuation of Bergman spaces*, Bull. Soc. math. France, **126** (1998) 435–482.

[3] J. Faraut, *Intégrales de Riesz sur un espaces symétrique ordonné* (2001)

[4] J. Faraut, *Quelques problèmes d'analyse sur les espaces symétriques ordonnés (in Positivity in Lie theory : open problems)*, De Gruyter Exp. Math. **26**, (1998) 71–80.

[5] J. Faraut, J. Hilgert and G. Ólafsson, *Spherical functions on ordered symmetric spaces*, Ann. Inst. Fourrier **44** (1994), 927–966.

[6] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford science publications (1994).

[7] J. Hilgert and G. Ólafsson, *Causal symmetric spaces, geometry and harmonic analysis*, Perspective in mathematics **18**, Academic Press, San diego, (1997).

[8] Kayoya, J.B. *Analyse sur les algèbres de Jordan simples réelles*, Thèse de l'université Paris VI, (1994).

[9] L. Schwartz, *Théorie des distributions,tome II*, Actualites Sci. Ind., no. 1122, Hermann, Paris, (1951)

[10] Z. Yan, *A class of generalized hypergeometric functions in several variables*, Canad. J. Math. **44**,6, (1992), 1317–1338.