UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAEM Lorraine
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT DE L'U.H.P
présentée par

Yann ANGELI

afin d'obtenir le diplôme

de DOCTEUR de l'Université Henri Poincaré
Spécialité: Mathématiques.

Sujet: Analyse harmonique sur les cônes satellites.

soutenue le 21 décembre 2001.

devant le jury composé de Messieurs les Professeurs:

Daniel BARLET	Professeur, UHP - Nancy I	Président.
Wolfgang BERTRAM	Professeur, UHP - Nancy I	Examinateur.
Jean-Louis CLERC	Professeur, UHP - Nancy I	Directeur.
Jacques FARAUT	Professeur, Paris VI	Rapporteur.
Gestur ÓLAFSSON	Professeur, Louisiana University - Bâton Rouge	Rapporteur.
Hubert RUBENTHALER	Professeur, ULP - Strasbourg I	Examinateur.

Institut Élie Cartan Nancy

Table des matières

Introduction.

La famille d'objets que nous nous proposons d'étudier dans ce travail s'inscrit dans trois grandes théories distinctes.

Le point de départ sera la théorie des algèbres de Jordan euclidiennes. Les axiomes définissant ces algèbres en font une généralisation des matrices symétriques réelles. On dispose, sur de telles algèbres, de beaucoup de résultats géométriques, tels que, par exemple un théorème de diagonalisation. Mais, ces objets s'avèrent également propices à l'analyse, fondée sur l'existence d'un cône convexe et homogène sous l'action d'un groupe lié à la structure d'algèbre. Ce cône est celui des matrices définies-positives dans l'exemple des matrices symétriques réelles. Il permet de développer une transformation de Laplace, compatible avec la loi de l'algèbre. Cet outil est fondamental dans l'étude de nombreuses fonctions classiques, et permet de généraliser l'analyse euclidienne.

La seconde théorie que nous rencontreront sera celle des espaces préhomogènes. Ce sont des espaces de représentation d'un groupe de Lie, avec une orbite ouverte et Zariski-dense. Ils forment en particulier une catégorie adaptée à la généralisation de la théorie des intégrales zêta.

Enfin, nous seront confrontés à la théorie des espaces symétriques ordonnés, qui décrit la géométrie et l'analyse d'une catégorie d'espaces symétriques de type pseudo-riemannien, espaces qui ont la particularité d'être dotés d'un ordre partiel, invariant sous l'action du groupe des isométries. On s'intéressera particulièrement à l'analyse harmonique de ces espaces, facilitée par le fait qu'il existe un large domaine, sur lequel les distributions sphériques, équivalent des fonctions exponentielles pour l'analyse euclidienne, peuvent être interprétées comme des fonctions.

L'idée de ce travail, est de réaliser certains espaces préhomogènes et certains espaces ordonnés dans un environnement d'algèbre de Jordan euclidienne, dont on utilisera les outils de géométrie et d'analyse, afin de recueillir des informations nouvelles sur les objets ainsi réalisés. Par exemple, nous utiliseront les fonctions disponibles dans les algèbres de Jordan pour construire des identités de type Bernstein. Dans ce texte, une identité de type Bernstein sur un espace vectoriel réel V sera :

$$D(\alpha_1,\ldots,\alpha_r;x;\partial)g_1(x)^{\alpha_1}\ldots g_r(x)^{\alpha_r}=b(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)g_1(x)^{\alpha_1-k_1}\ldots g_r(x)^{\alpha_r-k_r},$$

où D est un opérateur différentiel en $x\in V$, polynômial en x et en les paramètres complexes α_i, où les g_i sont des polynômes sur V, où b est un polynôme de r variables complexes, et où les k_i sont des entiers. L'interêt d'un telle identité, si elle est adaptée, est de permettre le prolongement analytique en les variables α_i de la distribution définie par le produit des $g_i^{\alpha_i}$. Nous allons produire de telles identités pour des distributions données comme des intégrales zêta d'une part, et pour des fonctions qui décident de la convergence de fonctions sphériques d'autre part.

Nous débuterons ce travail par l'exposé d'un exemple, qui permet de réaliser ce programme, presque sans référence aux trois théories évoquées précédemment. Les méthodes employées par la suite seront des généralisations de celles que l'on présentera dans ce premier chapitre.

Ensuite, nous rappellerons les principaux résultats de la théorie des algèbres de Jordan, en citant presque exclusivement l'ouvrage [**?**].

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude du prolongement des intégrales zêta sur certains préhomogènes, grâce à la construction d'identités de type Bernstein. Le résultat majeur de cette partie est le théorème **??**, qui exprime que la famille d'identités de Bernstein exhibée est assez riche, pour localiser avec une précision acceptable les pôles des intégrales zêta. Ce résultat est le théorème **??**.

Puis, nous rappellerons les faits majeurs relatifs aux espaces ordonnés, afin de préparer les deux derniers chapitres.

Par la suite, nous nous intéresserons à l'étude de la catégorie des cônes satellites, qui s'inscrit dans le cadre des espaces ordonnés. Le premier chapitre qui leur est dévolu fournira une description détaillée de leur géométrie, et sa réalisation en termes d'algèbre de Jordan.

Enfin, nous discuterons une conjecture de G.Ólafsson, et A. Pasquale, formulée dans [**?**], sur la forme des polynômes b de Bernstein associés à des identités cruciales pour l'étude des fonctions sphériques. Nous proposeront de réctifier cette conjecture, et donneront des formules de type Bernstein satisfaisantes, au regard de l'objectif qu'est l'étude des fonctions sphériques. La description de ces identités, que l'on relie aux identités des intégrales zêta, est un autre résultat important, le théorème **??**; le lieu de pôles potentiels qui en découle étant l'objet du théorème **??**.

Chapitre 1

Les matrices symétriques d'ordre 2.

1.1 Géométrie.

Dans ce chapitre, nous étudions des cas particuliers de cônes satellites, qui vivent dans l'espace ambiant $V = Sym(2,\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre 2. Les principaux résultats de ce travail sont démontrés dans ce contexte, sans référence explicite aux structures d'algèbre de Jordan et d'espace ordonné. Les démonstrations sont souvent simplifiables, mais sous la forme donnée, elles se généralisent aux situations de rang supérieur. Le but de ce chapitre est en effet de présenter dans un cadre simple les méthodes utilisées ultérieurement.

L'algèbre de Jordan V est, parmi les algèbres de Jordan de rang au moins 2, la plus facile à étudier. Elle appartient d'une part à la famille des algèbres de type "Lorentz", c'est-à-dire de rang 2, et d'autre part à la famille des matrices symétriques réelles, qui sont l'exemple fondateur de la structure d'algèbre de Jordan.

Dans $E = Mat(2,\mathbb{R})$, l'algèbre des matrices carrées, réelles et d'ordre 2, on note x' la transposée d'une matrice x. L'application $\tau(x,y) = \mathrm{tr}(xy')$ est une forme bilinéaire définie positive sur E. En coordonnées, nous avons :

$$\tau\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\right) = x_{11}y_{11} + x_{22}y_{22} + x_{12}y_{21} + x_{21}y_{12}.$$

L'espace des matrices symétriques réelles est donné par

$$V = \{x \in E : x' = x\},$$

et les quatres vecteurs suivants forment une base orthogonale (pour τ) de E :

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois premiers vecteurs donnent une base de V. Désormais, nous noterons x_i la composante suivant c_i d'un élément x de E : $x = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4$. Définissons la forme linéaire $\Delta_1(x) = x_1$ (mineur principal d'ordre 1 de x) et $\Delta_2(x) = \det(x)$ le déterminant des matrices. Pour $x \in V$, nous avons :

$$\Delta_2(x) = x_1x_2 - x_3^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 - x_3^2.$$

Le groupe $G = GL^+(2,\mathbb{R})$ est le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ composé des matrices inversibles de déterminant positif. Le groupe G agit fidèlement sur V par :

$$g \cdot x = gxg'.$$

Donnons les notations de sous-groupes classiques de G :

$$\begin{aligned}
H &= \pm\left\{h_t := \exp(tc_3) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = SO(1,1),\\
K &= \left\{k_\theta := \exp(i\theta c_4) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\right\} = SO(2),\\
A &= \left\{a_{s,t} := \exp(sc_1 + tc_2) = \begin{pmatrix} \exp s & 0 \\ 0 & \exp t \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\right\} \approx \mathbb{R}^2,\\
\overline{N} &= \left\{\overline{n}_x := \exp\left(x\frac{1}{2}(c_3 + c_4)\right) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\} \approx \mathbb{R},\\
N &= \left\{n_y := \exp\left(y\frac{1}{2}(c_3 - c_4)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\} \approx \mathbb{R},\\
M &= \{\pm Id\}.
\end{aligned}$$

Notons que d'ordinaire, N désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures strictes. Nous choisissons la convention inverse, pour des commodités de notations, qui seront clarifiées au moment d'introduire les algèbres de Jordan.

Le groupe K est le stabilisateur de $Id = e_{2,0}$, et c'est le groupe des rotations sur $\mathbb{R}^2$. C'est aussi le sous-groupe de G des isométries de G pour τ. Le groupe H est le stabilisateur de $e_{1,1} = c_1 - c_2$, c'est le sous-groupe spécial de la forme $x^2 - y^2$, et le sous-groupe de G des isométries de G pour $\tau' = \tau(e_{1,1} \cdot ,\cdot)$. L'intersection de H et K est M.

Les matrices de V étant symétriques réelles, elles sont diagonalisables dans une base orthonormée. Si x est dans V, nous avons donc pour un $k_\theta \in K$, $\lambda_1,\lambda_2 > 0$ et $\epsilon_1,\epsilon_2 \in \{1,0,-1\}$,

$$x = k_\theta \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^2\epsilon_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2\epsilon_2 \end{pmatrix} = k_\theta a_{\lambda_1,\lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix},$$

avec $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$. Notons Ω_{pq}, l'ensemble des matrices x de signature (p,q) où p,q sont respectivement le nombre de valeurs propres strictement positives et strictement négatives de x. Nous voyons que les signatures possibles sont (2,0), (1,1), (0,2) pour les matrices inversibles (de rang $p+q=2$), (1,0), (0,1) pour les matrices non-inversibles et non-nulles (de rang $p+q=1$) et (0,0) pour la matrice nulle. Alors, Ω_{pq} est l'orbite par G de e_{pq}, avec $e_{0,2} = -e_{2,0}$, et $e_{1,0} = c_1$, $e_{0,0} = 0$ et $e_{0,1} = c_2$.

Notons $\Omega'_{\epsilon_1,\epsilon_2} = NA \cdot e'_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ l'orbite du point $e'_{\epsilon_1,\epsilon_2} = \epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2$ sous l'action du groupe triangulaire inférieur NA, avec $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$. Remarquons ensuite que N stabilise c_1 et que, pour tout $g \in G$ et $x \in V$,

$$\det(g \cdot x) = \det(gxg') = \det(g)^2 \det(x),$$

de sorte que pour $z,s,t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Delta_1(n_z a_{s,t} \cdot x) &= \exp(2s)\Delta_1(x), \\ \Delta_2(n_z a_{s,t} \cdot x) &= \exp(2(s+t))\Delta_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi, les NA-orbites d'inversibles évitent le cône C et le plan P avec

$$\begin{aligned} C &: = \{x \in V : \Delta_2(x) = 0\}, \\ P &: = \{x \in V : \Delta_1(x) = 0\}. \end{aligned}$$

De plus, ces orbites sont exactement les $\Omega'_{\epsilon_1,\epsilon_2}$.

Notons que $\Omega_{2,0} = \Omega'_{1,1}$ est le cône convexe des matrices définies positives, et que $\Omega_{0,2} = \Omega'_{-1,-1}$ est celui des matrices définies négatives.

Dans la figure, le cône et le plan grisés représentent respectivement $\{\det x = 0\}$ et $\{x_1 = 0\}$. Trois orbites sont également représentées : l'orbite par N du point base $e_{1,1}$ en noir, et les orbites du même point par deux sous-groupes à un paramètre de A en gris.

1.2 Analyse euclidienne.

Introduisons les quatre distributions de Riesz de V : si f est dans l'espace de Schwartz de V, noté $\mathcal{S}(V)$, et si α_1 et α_2 sont deux complexes, nous posons sous réserve de convergence :

$$\Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(f,\alpha_1,\alpha_2) := \int_{\Omega'_{\epsilon_1,\epsilon_2}} \Delta_1(x)^{\alpha_1}\Delta_2(x)^{\alpha_2} f(x)dx,$$

où les puissances des mineurs sont définies une fois que l'on a fixé une coupure de $\mathbb{C}$, en dehors des deux demi-droites réelles. Du fait de la décroissance rapide de f, ces intégrales convergent absolument lorsque $\mathrm{Re}(\alpha_1) > 0$ et $\mathrm{Re}(\alpha_2) > 0$.

Afin d'étendre méromorphiquement ces distributions, nous allons rechercher des opérateurs différentiels $E_i(x,\alpha_1,\alpha_2,\partial)$, polynômiaux en toutes leurs variables, et qui satisfont les identités :

$$\begin{aligned} E_1(x,\alpha_1,\alpha_2,\partial)\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2} &= b_1(\alpha_1,\alpha_2)\Delta_1^{\alpha_1-1}\Delta_2^{\alpha_2}, \\ E_2(x,\alpha_1,\alpha_2,\partial)\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2} &= b_2(\alpha_1,\alpha_2)\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2-1}. \end{aligned}$$

En effet, une intégration par parties nous donnera alors :

$$\begin{aligned} \Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(f,\alpha_1-1,\alpha_2) &= \frac{1}{b_1(\alpha_1,\alpha_2)}\Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(E_1^* f,\alpha_1,\alpha_2), \\ \Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(f,\alpha_1,\alpha_2-1) &= \frac{1}{b_2(\alpha_1,\alpha_2)}\Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(E_2^* f,\alpha_1,\alpha_2), \end{aligned}$$

avec E_i^* l'opérateur dual de E_i pour la mesure de Lebesgue. Par prolongement analytique, $\Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ s'étend méromorphiquement à $\mathrm{Re}(\alpha_1) > -1$ et $\mathrm{Re}(\alpha_2) > -1$, avec éventuellement des pôles situés parmi les zéros de b_1 et b_2. En itérant ce procédé, on obtient un prolongement à $\mathbb{C}$, avec éventuellement des pôles parmi les translatés par $(-\mathbb{N})^2$ des zéros de b_1 et b_2.

Définissons $D_2 := \partial(\Delta_2)$ l'opérateur différentiel sur V tel que

$$D_2 \exp(\tau(x,y)) = \Delta_2(y)\exp(\tau(x,y)).$$

Nous avons :

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Après calcul,

$$D_2\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2} = \alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2+\frac{1}{2}\right)\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2-1}.$$

Etudions ensuite l'opérateur :

$$D_1(x,\alpha_2,\partial) := \Delta_2^{\alpha_2+1}(x) \circ \frac{\partial}{\partial x_1} \circ \Delta_2^{-\alpha_2}(x).$$

Il est clair que

$$D_1(x,\alpha_2,\partial)\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2} = \alpha_1\Delta_1^{\alpha_1-1}\Delta_2^{\alpha_2+1}.$$

Explicitions D_1 :

$$\begin{aligned} D_1(x,\alpha_2,\partial) &= \Delta_2^{\alpha_2+1}(x) \circ \left(\Delta_2^{-\alpha_2}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Delta_2^{-\alpha_2}(x)\right)\right) \\ &= \Delta_2(x)\frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha_2 x_2. \end{aligned}$$

Donc D_1 est polynômial en toutes ses variables. La stratégie expliquée plus haut est applicable à D_2 et D_1. Des applications successives de l'opérateur D_2 permettent de prolonger $\Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(f,\alpha_1,\alpha_2)$ à $\{\mathrm{Re}(\alpha_1) > 0\}\times\mathbb{C}$, avec éventuellement des pôles parmi les translatés par $\{0\}\times(-\mathbb{N})$ des zéros de $\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+1/2)$, puis, l'utilisation de D_1 permet d'étendre $\Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(f,\alpha_1,\alpha_2)$ à $\mathbb{C}^2$, avec des pôles parmi les translatés par $(-\mathbb{N})^2$ des zéros de $\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+1/2)$. En particulier, tous les pôles effectifs sont des pôles simples. Ce résultat se reformule ainsi : l'application

$$(\alpha_1,\alpha_2) \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+3/2)}\Phi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(f,\alpha_1,\alpha_2)$$

se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^2$.

Remarque 1.2.1
Recherche d'opérateurs "optimaux". Posons : $E_2 := D_2$ et :

$$\begin{aligned} E_- &:= D_1(x,\alpha_2-1,\partial) \circ E_2, \\ E_+ &:= E_2 \circ D_1(x,\alpha_2,\partial). \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_-\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2} &= \alpha_1(\alpha_2-1)\left(\alpha_1+\alpha_2+\frac{1}{2}\right)\Delta_1^{\alpha_1-1}\Delta_2^{\alpha_2}, \\ E_+\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2} &= \alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2+\frac{1}{2}\right)\Delta_1^{\alpha_1-1}\Delta_2^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont tous deux du type recherché. En les combinant, nous pouvons minimiser le degré du facteur polynômial b_2. Ainsi, l'opérateur $E_1 := E_+ - E_-$ vérifie l'identité :

$$E_1 \Delta_1^{\alpha_1} \Delta_2^{\alpha_2} = \alpha_1 \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2} \right) \Delta_1^{\alpha_1 - 1} \Delta_2^{\alpha_2}.$$

Remarque 1.2.2
Recherche des domaines de convergence. Dans le cas des cônes convexes $\Omega_{2,0}$ et $\Omega_{0,2}$, nous pouvons montrer que le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant les distributions zêta est en fait contenu dans $\mathrm{Re}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$ et $\mathrm{Re}(\alpha_2) > 0$. Il suffit, par exemple pour $\Omega_{2,0}$, d'effectuer le changement de variables $x = a_{1,\log t} n_x a_{\log s,1} e_{2,0}$ avec x,s,t réels et s,$t > 0$. Ainsi, l'opérateur D_2 suffit à prolonger holomorphiquement

$$(\alpha_1,\alpha_2) \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 3/2)} \Phi_{\epsilon,\epsilon}(f,\alpha_1,\alpha_2)$$

à $\mathbb{C}^2$, avec $\epsilon = \pm 1$.

1.3 Structure d'ordre.

Nous pouvons munir l'espace V d'une structure d'ordre partiel, en posant :

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x - y \in \overline{\Omega}_{2,0}.$$

Par G-invariance de $\Omega_{2,0}$, cet ordre est G-invariant. Il est aussi clairement compatible avec l'addition vectorielle. Les G-orbites ouvertes $\Omega_{2,0}$, $\Omega_{1,1}$, et $\Omega_{0,2}$ sont alors munies de la structure d'ordre induit. Ainsi, l'avenir du point base de chacunes de ces orbites peut être décrit par :

$$\begin{aligned}
A_{2,0} &= \{x \in \Omega_{2,0} : e_{2,0} \preccurlyeq x\} = e_{2,0} + \overline{\Omega}_{2,0}, \\
A_{1,1} &= \{x \in \Omega_{1,1} : e_{1,1} \preccurlyeq x\} = \left(e_{1,1} + \overline{\Omega}_{2,0}\right) \cap \Omega'_{1,-1}, \\
A_{0,2} &= \{x \in \Omega_{0,2} : e_{0,2} \preccurlyeq x\} = \left(e_{0,2} + \overline{\Omega}_{2,0}\right) \cap (-\Omega_{2,0}).
\end{aligned}$$

La seule des assertions précédentes qui n'est pas une reformulation de la définition est la seconde (qui précise que $A_{1,1}$ est contenu dans $\Delta_1(x) = x_1 > 0$), mais elle est évidente.

Notons $D =]-1,1[$. Cet intervalle constitue une réalisation ouverte, convexe, et bornée de l'espace symétrique H/M. En effet, la formule

$$h_t = n_{\mathrm{th}t} a_{\log \mathrm{ch}t, -\log \mathrm{ch}t} \overline{n}_{\mathrm{th}t} \tag{1.1}$$

montre que dans $P\backslash G$, avec P le parabolique $P = MAN$, on a $P{\cdot}h_t = P{\cdot}\overline{n}_{\mathrm{th}t}$. Ce qui permet d'identifier

$$H/M \approx P \cdot H = P \cdot \overline{N} \subset P\backslash G.$$

Remarquons que, dans la figure, le cône gris et le plan gris représentent toujours respectivement C et P, le cône partiel noir est l'avenir du point base $e_{1,1}$, et le morceau de parabole noire est l'orbite $\overline{n}_D \cdot e_{1,1}$.

Enfin, donnons un paramétrage de l'intérieur de l'avenir du point $e_{1,1}$:

$$A^o_{1,1} = H \cdot \{a_{rs} : r > 0 > s\} \cdot e_{1,1}. \tag{1.2}$$

En effet,

$$h_t \cdot x = \begin{pmatrix} x_1\mathrm{ch}^2t + x_2\mathrm{sh}^2t + x_3\mathrm{sh}2t & x_3\mathrm{ch}2t + (x_1+x_2)\mathrm{ch}t\mathrm{sh}t \\ x_3\mathrm{ch}2t + (x_1+x_2)\mathrm{ch}t\mathrm{sh}t & x_1\mathrm{sh}^2t + x_2\mathrm{ch}^2t + x_3\mathrm{sh}2t \end{pmatrix}.$$

Or $x_1 + x_2 \neq 0$, sinon $\det(x - e_{11}) = -(x_1-1)^2 - x_3^2 \leq 0$, ce qui contredit $x \in A^o_{1,1}$. Ainsi, il existe t tel que $h_t \cdot x$ soit diagonal :

$$t = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arg\,th}\left(\frac{2x_3}{x_1+x_2}\right).$$

Cette matrice diagonale y est aussi dans $A^o_{1,1}$. Cela résulte des deux faits suivants : $A^o_{1,1}$ est H-invariant (par invariance de $\Omega_{2,0}$) et $He_{1,1} = e_{1,1}$. La condition $y \in A^o_{1,1}$ donne alors $y = a_{rs} \cdot e_{1,1}$ avec $r > 0 > s$.

1.4 Analyse harmonique sur $\Omega_{1,1}$.

Puisque H est le stabilisateur dans G de $e_{1,1}$, l'orbite $\Omega_{1,1} = G \cdot e_{1,1}$ s'identifie au quotient G/H. Définissons les fonctions sphériques de G/H, qui vont jouer le rôle des exponentielles dans l'analyse harmonique de cet espace symétrique. Pour $x \in A^o_{1,1}$ (l'interieur de l'avenir de $e_{1,1}$), et $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$, posons

$$\begin{aligned} \varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(x) &= \int_H \Delta_1(h\cdot x)^{-\lambda_1}|\Delta_2(h\cdot x)|^{-\lambda_2}dh \\ &= |\Delta_2(x)|^{-\lambda_2}\int_H \Delta_1(h\cdot x)^{-\lambda_1}dh \\ &= |\Delta_2(x)|^{-\lambda_2}\varphi_{\lambda_1}(x) \end{aligned}$$

où dh est une mesure de Haar de H. Nous allons donner un domaine de convergence absolue des $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$, puis montrer que ces fonctions se prolongent méromorphiquement en λ_1,λ_2 en utilisant l'identité de Bernstein de l'opérateur E_1.

Pour le paramétrage de H par t, la mesure de Lebesgue dt est une mesure H-invariante, comme le montrent les formules d'addition des fonctions hyperboliques. Enfin, par H-invariance de φ_{λ_1}, nous pouvons supposer $x_3 = 0$, en référence à la formule **??**. D'après la formule **??**, et l'invariance relative des Δ_i par NA,

$$\begin{aligned}\varphi_{\lambda_1} &= 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{ch}(t)^{-2\lambda_1}\Delta_1^{-\lambda_1}(\overline{n}_{\mathrm{th}t}\cdot x)dt\\ &= 2\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\lambda_1-1}\Delta_1^{-\lambda_1}(\overline{n}_u\cdot x)du\\ &= 2\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\lambda_1-1}(x_1+u^2x_2)^{-\lambda_1}du.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in (e_{1,1}+\varepsilon e_{2,0}+\Omega_{2,0})\cap\Omega_{1,1} \subset A^o_{1,1}$ nous avons $x - e_{1,1} - \varepsilon e_{2,0} \in \Omega_{2,0}$, donc $x_1 > 1+\varepsilon$ et

$$x_2x_1 + (1-\varepsilon)x_1 - (1+\varepsilon)x_2 - 1 + \varepsilon^2 > 0,$$

donc,

$$x_2 > -1 + \frac{\varepsilon}{x_1-(1+\varepsilon)}(x_1-\varepsilon-1) > -1.$$

D'où $(x_1+u^2x_2) > (1+\varepsilon-u^2)$, et l'intégrale qui définit φ_{λ_1} converge absolument pour $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 1$. Afin d'obtenir le prolongement méromorphe de cette fonction, il suffit de trouver un opérateur différentiel $D(u,\lambda)$, polynômial en u et λ, tel que

$$D(u,\lambda)(1-u^2)^{\lambda} = b(\lambda)(1-u^2)^{\lambda-1},$$

avec b un polynôme. Une méthode (compliquée dans ce cas, mais généralisable), consiste d'abord à effectuer le changement de variable

$$x = a_{\log s,\log t}\overline{n}_u e_{1,1},$$

sur un ouvert U, A-invariant, et qui contient $e_{1,1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}x_1 &= s^2(1-u^2)\\ x_2 &= -t^2\\ x_3 &= -stu,\end{aligned}$$

La matrice jacobienne et son inverse sont :

$$\begin{aligned}
J(s,t,u) &= \begin{pmatrix} 2s(1-u^2) & 0 & -2us^2 \\ 0 & -2t & 0 \\ -tu & -su & -st \end{pmatrix}; \\
J(s,t,u)^{-1} &= \frac{1}{2s^2t^2}\begin{pmatrix} st^2 & s^3u^2 & -2s^2tu \\ 0 & -s^2t & 0 \\ -t^2u & us^2(1-u^2) & -2st(1-u^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dans ces coordonnées, l'opérateur D_1 devient :

$$\begin{aligned}
D_1(u,s,t,\lambda_2) &= \Delta_2(x)\frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_2 x_2. \\
&= \frac{1}{2s}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2s^2}u\frac{\partial}{\partial u} + \lambda_2 t^2.
\end{aligned}$$

Supposons que f soit une fonction de $C^\infty(U)$, relativement invariante par A :

$$f(a_{\log s,\,\log t}x) = s^{2\lambda_1}f(x),\ \forall x \in U.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
[D_1(u,s,t,0)f(x)]_{s,t=1} &= \Big[D_1(u,s,t,0)\{s^{2\lambda_1}f(\overline{n}_u e_{1,1})\}\Big]_{s,t=1} \\
&= \left[s^{2(\lambda_1-1)}\left\{\lambda_1 - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}\right\}f(\overline{n}_u e_{1,1})\right]_{s,t=1} \\
&= \left\{\lambda_1 - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}\right\}f(\overline{n}_u e_{1,1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur entre accolades est la partie radiale de $D_1(u,s,t,0)$ pour les fonctions relativement invariantes, de caractère $s^{2\lambda_1}$, sur U. Appelons le $\Delta(D_1)_{\lambda_1,u}$. Il est polynômial en toutes ses variables, et satisfait :

$$\begin{aligned}
\Delta(D_1)_{\lambda_1,u}(1-u^2)^{\lambda_1} &= \Delta(D_1)_{\lambda_1,u}\Delta_1^{\lambda_1}(\overline{n}_u e_{1,1}) \\
&= \Big[D_1(u,s,t,0)\Delta_1^{\lambda_1}(x)\Big]_{s,t=1} \\
&= \lambda_1\Delta_1^{\lambda_1-1}(\overline{n}_u e_{1,1}) \\
&= \lambda_1(1-u^2)^{\lambda_1-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $(1+\varepsilon-u^2)$ est dans $C^\infty(]-1-\varepsilon,1+\varepsilon[)$, une application successive des opérateurs $\Delta(D_1)$ permet de prolonger méromorphiquement la fonction φ_{λ_1} à $\mathbb{C}$, avec peut-être des pôles simples aux points de coordonnées entières négatives. Le prolongement des fonctions sphériques $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}$ s'en déduit.

Chapitre 2

Généralités sur les algèbres de Jordan.

2.1 Algèbres de Jordan.

Ce paragraphe est consacré à l'introduction des principaux objets liés aux algèbres de Jordan. Les notations que nous allons exposer sont classiques, et sensiblement les mêmes que dans le livre de J. Faraut et A. Korányi, [?]. Les notions mentionées ici y sont developpées dans le chapitre II.

On désigne par V une *algèbre de Jordan* réelle de dimension finie n, *simple,* et *euclidienne*. Cela signifie que V est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une loi de multiplication commutative qui vérifie l'axiome

$$x(x^2y) = x^2(xy),\ \forall x,y \in V,$$

que V n'admet aucun idéal non trivial, et que V est doté d'une forme bilinéaire associative définie positive.

On note L la *représentation régulière* de V, P sa *représentation quadratique*, et $\{,,\}$ son *système triple* associé, à savoir :

$$\begin{array}{rcl} L(x)y & = & xy,\ \forall x,y \in V, \\ P(x) & = & 2L(x)^2 - L(x^2),\ \forall x \in V, \\ \{x,y,z\} & = & x(yz) - y(xz) + (xy)z,\ \forall x,y,z \in V. \end{array}$$

En conséquence de sa simplicité, V possède un élément neutre e. Etant donné un élément x de V, le sous espace $\mathbb{R}[x]$ de V engendré par e et les différentes puissances de x est une sous-algèbre associative de V. Sa dimension est le rang de x et on définit le *rang* r de V comme le rang maximum d'un élément de V. On définit la *trace* $\mathrm{tr}(x)$ et le *déterminant* $\det(x) = \Delta(x)$ d'un élément x comme respectivement la trace et le déterminant de la restriction à $\mathbb{R}[x]$ de $L(x)$.

Lorsque un élément x de V a un déterminant non nul, il possède une inverse dans $\mathbb{R}[x]$ qui définie son *inverse* dans V. Nous désignerons par

$$V^{\times} = \{x \in V : \det(x) \neq 0\}$$

l'ensemble des inversibles de V.

La forme bilinéaire associative τ est unique à la multiplication par un scalaire positif près, toujours par simplicité de V. L'application suivante est bilinéaire associative et définie positive sur V. Désormais, c'est elle que nous désignerons par τ :

$$\tau(x,y) := \mathrm{tr}(xy),\ \forall x,y \in V.$$

Si $g \in \mathfrak{gl}(V)$ est une application linéaire de V, nous noterons g' son adjoint pour la forme τ.

Cela nous amène à la définition du *groupe de structure* de V :

$$Str(V) := \{g \in GL(V) : \forall x \in V,\ gP(x)g' = P(gx)\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $GL(V)$, et un groupe de Lie réductif. Il contient le groupe des *automorphismes* de V :

$$Aut(V) = \{g \in G : \forall x,y \in V,\ g(xy) = (gx)(gy)\},$$

qui en est sous-groupe compact maximal.

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie sera toujours notée avec la lettre gothique qui correspond à la lettre du groupe. La composante connexe contenant l'élément neutre d'un groupe topologique est notée avec un indice o. Ainsi, la composante connexe du neutre dans $Str(V)$ est $G = Str(V)_o$, celle de $Aut(V)$ est notée $K = Aut(V)_o$. Ces groupes sont d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$.

2.2 Cônes et algèbres de Jordan euclidiennes.

Les algèbres de Jordan euclidiennes forment une catégorie naturellement équivalente à la catégorie des *cônes symétriques*. Le cône associé à une algèbre de Jordan euclidienne permet développer l'outil de transformation de Laplace euclidienne, fondamental en analyse.

Rappelons ce qu'est un cône symétrique. Soit C un *cône* (ensemble stable par dilatation strictement positive) d'un espace euclidien V de dimension finie. Le cône C est dit *pointu* si $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$. Il est *générateur* si $C - C = V$. Son cône ouvert dual est

$$C^* = \{y \in V : (x,y) > 0, \forall x \in \overline{C} - \{0\}\}.$$

C est *auto-dual* si $C^* = C$. Enfin, C est *homogène* si le sous-groupe de $GL(V)$ qui le conserve agit transitivement sur C.

Définition 2.2.1
Un cône symétrique est un cône ouvert, convexe, pointu, générateur, auto-dual et homogène.

On démontre ([**?**], proposition III.2.2. et théorème III.3.1.) le

Théorème 2.2.1
L'intérieur Ω de l'ensemble des carrés d'une algèbre de Jordan euclidienne est un cône symétrique. Réciproquement, tout cône symétrique est l'intérieur des carrés d'une algèbre de Jordan euclidienne.

Dans cette situation, le sous-groupe $G(\Omega)$ de $GL(V)$ qui préserve Ω est un sous-groupe ouvert, d'indice 2, du groupe de structure $Str(V)$. Ainsi, G est aussi la composante connexe de $G(\Omega)$. Par homogénéité et connexité de Ω, G agit transitivement sur Ω.

2.3 Décomposition de Peirce et opérateurs de Frobenius.

L'étude des idempotents s'impose en raison de leur rôle crucial dans le théorème de décomposition spectrale sur les algèbres de Jordan, analogue du théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles. Par ailleurs, une famille importante d'opérateurs nilpotents leur est associée.

Soit c un *idempotent* de V, c'est-à-dire un élément de V tel que $c^2 = c$. On note $V(c,\lambda)$ le sous-espace propre de $L(c)$ dans V relativement à la valeur propre λ. On a :

$$V = V(c,1) \oplus V(c,1/2) \oplus V(c,0).$$

Cette somme directe est orthogonale par rapport à τ. On l'appelle *décomposition de Peirce* relative à l'idempotent c. Les sous-espaces $V(c,1)$ et $V(c,0)$ sont des sous-algèbres simples de V, et les termes de la somme directe sont soumis aux relations :

$$\begin{array}{rcl} (V(c,1)+V(c,0))\cdot V(c,1/2) & \subset & V(c,1/2), \\ V(c,1/2)\cdot V(c,1/2) & \subset & V(c,1)+V(c,0), \\ V(c,1)\cdot V(c,0) & = & \{0\}. \end{array}$$

Ces résultats sont démontrés dans [**?**], paragraphe IV.1.

A partir de l'idempotent c, on est en mesure de définir pour chaque $z \in V(c,1/2)$, l'*opérateur de Frobenius* :

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon_{c,z} & = & \exp(L(z)+2[L(z),L(c)]) \\ & = & \exp(2\{c,z,.\}) \\ & = & I+2\{c,z,.\}+2\{c,z,.\}^2. \end{array}$$

La dernière égalité tient au fait que $\{c,z,.\}$ est un opérateur nilpotent d'ordre 2. En fixant $x = x_0 + x_{1/2} + x_1$ dans V, avec x_λ sa composante dans V_λ, on obtient pour $y = \Upsilon_{c,z}(x)$:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 \\ y_{1/2} & = & 2zx_1 + x_{1/2} \\ y_0 & = & 2(e-c)(z(zx_1)) + 2(e-c)(zx_{1/2}) + x_0. \end{array} \tag{2.1}$$

Ces résultats sont mentionnés dans [**?**] aux pages 106 et 107. Citons ensuite une propriété importante de ces opérateurs, démontrée en particulier dans la proposition 3 de [**?**] :

Proposition 2.3.1
Soit $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ dans V, avec $x_\lambda \in V_\lambda$, et x_1 inversible dans V_1. Alors il existe un $z \in V_{1/2}$ et un $y_0 \in V_0$ uniques tels que :

$$x = \Upsilon_{c,z}(x_1 + y_0).$$

En outre, $z = 2x_1^{-1}x_{1/2}$ et $y_0 = x_0 - 2c(x_{1/2}(x_1^{-1}x_{1/2}))$.

Finissons en introduisant la *représentation de Dorfmeister* associée à un idempotent.

Une *représentation* ϕ de l'algèbre de Jordan V sur l'espace vectoriel E est une application linéaire ϕ de V dans les endomorphismes de E, telle que :

$$\phi(xy) = \frac{1}{2}\left(\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x)\right) \quad \forall x,y \in V.$$

Supposons E muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_E$. La représentation est *autoadjointe*, si $\phi(x)$ est autoadjoint pour tout x de V. Soit ξ dans E, alors il existe un unique élément $Q(\xi)$ de V, dépendant de ξ, tel que, pour tout x dans V,

$$(\phi(x)\xi,\xi)_E = \tau(x,Q(\xi)).$$

En outre, $Q : E \to V$ est une application quadratique à valeurs dans le cône fermé $\overline{\Omega}$.

La représentation de Dorfmeister associée à c est la représentation :

$$\phi_c : V_1 \to End(V_{1/2}),\ x \mapsto (\phi(x) : V_{1/2} \to V_{1/2},\ \xi \mapsto 2x\xi).$$

On a alors la proposition suivante, numérotée VI.4.1 dans [**?**],

Proposition 2.3.2
L'application ϕ_c de V_1 (qui est euclidienne car V est euclidienne) dans $End(V_{1/2})$, est une représentation autoadjointe d'algèbre de Jordan. En outre, $\phi_c(c)$ est l'application identique, et l'application quadratique associée est donnée par

$$Q_c(\xi) = 2c\xi^2. \tag{2.2}$$

2.4 Repère de Jordan.

Les propriétés énoncées dans ce paragraphe trouvent par exemple leurs démonstrations dans le paragraphe IV.2 de [**?**].

Un *repère de Jordan* est une famille $(c_i)_{i=1}^r$ d'idempotents ($c_i^2 = c_i$) deux à deux orthogonaux ($c_ic_j = 0$ pour $i \neq j$) et dont la somme est l'élément neutre e. Définissons les espaces suivants pour $i,j \in \{1,...,r\}$ distincts :

$$\begin{aligned} V_{ii} &= V(c_i,1) = \mathbb{R}c_i, \\ V_{ij} &= V(c_i,1/2) \cap V(c_j,1/2). \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$, les espaces V_{ij} sont tous de même dimension d. Ce nombre satisfait l'équation

$$n = r + \frac{d}{2}r(r-1).$$

L'algèbre V se décompose alors en la somme directe et orthogonale pour τ :

$$V = \bigoplus_{1\leq i<j\leq r} V_{ij}.$$

Le comportement de cette décomposition par rapport à la multiplication de l'algèbre est décrit ainsi :

$$\begin{array}{rcl} V_{ij}\cdot V_{ij} & \subset & V_{ii}+V_{jj}, \\ V_{ij}\cdot V_{jk} & \subset & V_{ik} \text{ si } i\neq k, \\ V_{ij}\cdot V_{kl} & = & \{0\} \text{ si } \{i,j\}\cap\{k,l\}=\emptyset. \end{array}$$

Enonçons ensuite la généralisation du théorème classique de diagonalisation des matrices symétriques réelles :

Théorème 2.4.1
Pour tout élément x de rang k de V, il existe k réels non nuls $\lambda_1,...,\lambda_k$ et un repère de Jordan $(c_i)_{i=1}^r$ tels que

$$x=\lambda_1c_1+...+\lambda_kc_k.$$

Il est référencé comme le théorème III.1.2 de [**?**]. Dans ce même ouvrage, le corollaire IV.2.7 affirme que K agit transitivement sur l'ensemble des repères de Jordan. En conséquence, on a le

Théorème 2.4.2
Soit $(c_i)_{i=1}^r$un repère de Jordan. Tout élément x de V s'écrit comme

$$x=k\cdot\sum_{i=1}^r a_ic_i,$$

où $k\in K$, et les a_i sont des réels tels que $a_1\geq ...\geq a_r$. Les a_i sont alors déterminés de manière unique, et k est unique modulo le sous-groupe M de K qui fixe chacun des c_i.

Achevons ce paragraphe par la définition d'un *opérateur de type Frobenius*, associé au couple (i,j), pour $i\neq j$ et $z\in V_{ij}$:

$$\Upsilon_{ij,z}:=\Upsilon_{c_i,z}.$$

2.5 Algèbres emboitées.

Nous fixons désormais, et jusqu'à la fin, un repère de Jordan $(c_i)_{i=1}^r$ de l'algèbre de Jordan euclidienne V.

Dans ce paragraphe, on va définir deux familles d'algèbres gigognes et les objets associés, qui interviennent notamment dans la définition des distributions de Riesz.

Fixons $p \in \{1,...,r\}$. On considère l'idempotent somme des p premiers éléments du repère de Jordan $(c_i)_{i=1}^r$:

$$e_p := c_1 + ... + c_p.$$

Soit $V_p = V(e_p,1)$ la sous-algèbre simple associée. Elle est de rang p et d'élément neutre e_p. Nous notons Δ_{V_p} son déterminant et n_p sa dimension. On étend la définition du déterminant à l'algèbre V toute entière en posant :

$$\Delta_p(x) := \Delta_{V_p}(x^{(p)})$$

où $x^{(p)}$ désigne la projection orthogonale de x sur V_p. En référence à l'exemple des matrices symétriques, ce déterminant Δ_p est appelé le p-ème *mineur principal* de V. L'intérieur du cône des carrés de l'algèbre V_p est noté Ω_p. Le projecteur orthogonal de V sur V_p est donné par $P(e_p)$, et $(c_i)_{i=1}^p$ constitue un repère de Jordan de V_p.

Adoptons enfin la convention $V_0 = \{0\}$, $e_0 = \{0\}$, $\Delta_0 = 1$. Nous obtenons ainsi un drapeau :

$$V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset ... \subset V_{r-1} \subset V_r = V.$$

Imitons cette construction en se basant cette fois sur l'idempotent :

$$e_q^* = c_{r-q+1} + ... + c_r.$$

Nous obtenons les objets $V_q^* = V(e_q^*,1)$, Δ_q^*, $n_q^* = \dim V_q^*$, Ω_q^*.

En particulier, on a : $V = V_r = V_r^*$ et $\det = \Delta = \Delta_r = \Delta_r^*$.

Observons pour finir que si $p+q = r$ alors $V_q^* = V(e_p,0)$ et $V_p = V(e_q^*,0)$. Nous notons

$$V^{pq} = V(e_p,1/2) \cap V(e_q^*,1/2),$$

de sorte que $V = V_p \oplus V^{pq} \oplus V_q^*$ soit la décomposition de Peirce relative aux idempotents e_p et e_q^*.

2.6 Réalisation de G/K, décomposition de Cartan.

Comme G est un sous-groupe réductif de $GL(V)$, son algèbre de Lie se réalise comme une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{gl}(V)$, l'algèbre des endomorphismes de V pour le crochet de Lie classique. L'involution $\theta(x) = (x')^{-1}$ de $GL(V)$ se dérive en $\theta(x) = -x'$ sur $\mathfrak{gl}(V)$. On montre que G est θ-stable.

L'application θ est alors une involution de Cartan de G. Notons $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$) l'espace des points fixes (resp. anti-fixes) de θ dans $\mathfrak{gl}(V)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= Der(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : X(ab) = a(Xb) + (Xa)b, \forall a,b \in V\} = Lie(K) \\ \mathfrak{p} &= \{L(x) : x \in V\}\end{aligned}$$

En vertu de la décomposition de Cartan,

$$\mathfrak{p} \times K \approx G, \text{ via } (X,K) \mapsto \exp(X)K,$$

et de l'identité :

$$P\left(\exp \frac{x}{2}\right) = \exp L(x), \tag{2.3}$$

on a : $G = P(\exp V)K$. Par ailleurs, on montre que K est le fixateur dans G de l'élément e, de sorte que l'espace riemannien symétrique G/K se réalise dans V comme $P(\exp V)e = P(\Omega)e = \Omega$, car $\exp(V) = \Omega$ et $P(x)e = x^2$. Le plan tangent au point base e s'identifie alors à V, et le produit scalaire K-invariant qui donne à G/K sa structure riemannienne n'est autre que τ.

Une mesure G-invariante de l'espace quotient Ω est donnée par :

$$d^\times x = \Delta(x)^{-\frac{n}{r}} dx,$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur V. On réalisera ultérieurement une famille d'espaces symétriques non-riemanniens de manière analogue.

2.7 Sous-groupe de Cartan et décompostion polaire.

A la donnée d'un repère de Jordan $(c_i)_{i=1}^r$ correspond un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$. En effet, posons :

$$R = \{\lambda_1 c_1 + ... + \lambda_r c_r : \lambda_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \{1,...,r\}\} \text{ et } \mathfrak{a} = L(R)$$

$\mathfrak{a}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$, à savoir un sous-espace de Cartan. En outre, de l'ordre des éléments du repère de Jordan, nous déduisons une chambre de Weyl positive :

$$R^+ = \{\lambda_1 c_1 + ... + \lambda_r c_r : \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_r\} \text{ et } \mathfrak{a}^+ = L(R^+).$$

Observons que la formule **??** nous donne un paramétrage du groupe A associé : $A = P(\exp R)$.

Comme M est le fixateur de chacun des c_i dans K, M est le centralisateur dans K de $\mathfrak{a}$ pour la représentation adjointe. Du fait de la décomposition polaire du groupe G,

$$K/M \times A^+ \times K \approx G, \text{ via } (k_1,a,k_2) \mapsto k_1 a k_2,$$

et de la réalisation de Ω comme espace symétrique, Ω hérite d'une décomposition polaire, qui est donnée par le théorème **??**.

2.8 Le sous-groupe nilpotent N.

Désormais, les lettres grasses désignent un vecteur de $\mathbb{C}^r$. Ainsi, nous posons $\mathbf{a} = (a_1,...,a_r)$. Nous identifierons les formes linéaires $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{C}^r$, via $\lambda : \mathbb{C}^r \to \mathfrak{a}^*, \mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$ défini par :

$$\lambda_{\mathbf{a}}(\mu_1 L(c_1) + ... + \mu_r L(c_r)) = \sum_{i=1}^{r} a_i \mu_i.$$

Si $\mathbf{1}_i$ désigne le vecteur de $\mathbb{C}^r$ dont toutes les coordonnées sont nulles, excepté la i-ème qui vaut 1, on pose

$$\alpha_{ij} := \lambda_{\frac{1}{2}(\mathbf{1}_j - \mathbf{1}_i)}.$$

Notons ensuite

$$\mathfrak{g}_{ij} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a}, [H,X] = \alpha_{ij}(H)\}.$$

D'après la proposition VI.3.3 de [**?**], on a $\theta(\mathfrak{g}_{ij}) = \mathfrak{g}_{ji}$, et

$$\mathfrak{g}_{ij} = \{\{c_i, z, .\} : z \in V_{ij}\}.$$

En particulier, $\dim \mathfrak{g}_{ij} = d$. On montre également que l'algèbre $\mathfrak{n} = \oplus_{i<j} \mathfrak{g}_{ij}$ est l'algèbre nilpotente associé au choix de la chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$.

Ainsi, le système de racines restreintes de $\mathfrak{g}$ par rapport au sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ est $\Delta = \{\alpha_{ij} : i \neq j\}$, et chacune de ces racines est de multiplicité d. Le système de racines positives correspondant au choix de $\mathfrak{a}^+$ est $\Delta^+ = \{\alpha_{ij} : i < j\}$ et le système de racines simples associé est $\Pi = \{\alpha_i := \alpha_{ii+1} : i = 1,...,r-1\}$. En résumé, le système de racines restreintes Δ est de type A_r, avec multiplicité d.

La demi-somme des racines positives avec multiplicité est λ_ρ, avec $\rho \in \mathbb{C}^r$ donné par

$$\rho_i = \frac{d}{4}(2i - r - 1) = \frac{1}{2}\left(d(i-1) + 1 - \frac{n}{r}\right), \forall i \in \{1,...,r\}.$$

Définissons, pour $i,j \in \{1,...,r\}$ et $i \neq j$, le covecteur h_{ij} de α_{ij} par

$$h_{ij} = 2\,(c_j - c_i)\,.$$

Ainsi, $\alpha_{ij}(h_{ij}) = 2$ et

$$\tau(h_{ij},h) = 4\alpha_{ij}(L(h)),$$

pour tout $h \in R$. Enfin, construisons les poids fondamentaux $\lambda_{\mu_i} \in \mathfrak{a}^*$, définis par la relation

$$(\lambda_{\mu_i},\alpha_j) = \delta_{ij}(\alpha_j,\alpha_j).$$

Définissons $\mu_i \in \mathbb{C}^r$ par $\mu_{ij} = -1$ si $j \in \{1,...,i\}$ et 0 si $j \in \{i+1,...,r\}$. Alors, les μ_i satisfont la relation précédente.

On considère le groupe des permutations $\mathcal{W}$ de $\{1,...,r\}$. On fait agir $w \in \mathcal{W}$ sur $\mathfrak{a}^*$ en posant

$$w \cdot \lambda_\alpha := \lambda_{w\cdot\alpha} = \lambda_{\alpha_{(w\cdot 1)}\mathbb{1}_1+...+\alpha_{(w\cdot r)}\mathbb{1}_r}.$$

$\mathcal{W}$ stabilise Δ, et on montre que c'est le groupe de Weyl associé à Δ.

Le groupe nilpotent N est engendré par les $\Upsilon_{ij,z}$ avec $i < j$. On définit de même le groupe $\overline{N} = \theta(N)$.

Introduisons encore la sous-algèbres $\mathfrak{n}_p$ (resp. $\mathfrak{a}_p$ et $\overline{\mathfrak{n}}_p$) de $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{a}$ et $\overline{\mathfrak{n}}$) qui annule e_q^*. Le sous-groupe analytique associé est N_p (resp. A_p et $\overline{N}_p$), et sa restriction à V_p est le sous-groupe du groupe $Str(V_p)$ dont la définition correspond à celle de N (resp. A et $\overline{N}$), pour V. Nous définissons, de façon similaire les objets relatifs à e_q^* : $\mathfrak{n}_q^*$, $\mathfrak{a}_q^*$, etc...

Rappelons pour finir la décomposition d'Iwasawa, au niveau du groupe :

$$N \times A \times K \approx G, \text{ via } (n,a,k) \mapsto nak.$$

Le difféomorphisme correspondant $\Omega \approx NA\cdot e$ porte le nom de *décompostion de Gauss.*

2.9 Complexification de G.

L'espace vectoriel $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Jordan sur le corps des complexes. D'après les propositions VIII.1.1 et VIII.2.6, les groupes $Aut(V^{\mathbb{C}})$ et $G_{\mathbb{C}} := Str(V^{\mathbb{C}})$ sont des complexfications de respectivement $Aut(V)$ et $Str(V)$, au sens ou $Str(V) \subset GL(V)$ est un sous-groupe de $Str(V^{\mathbb{C}}) \subset GL(V^{\mathbb{C}})$ avec $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := Lie(Str(V^{\mathbb{C}})) = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$.

Une algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est donnée par $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$.

2.10 Fonction Γ_Ω du cône convexe.

L'analyse sur les algèbres de Jordan repose sur deux outils essentiels. D'une part l'analyse harmonique euclidienne, à travers la transformation de Laplace, et l'analyse non-commutative provenant du groupe de structure d'autre part. En particulier, les algèbres de Jordan sont équipées de fonctions explicites, analogues des fonctions puissances ou gamma d'Euler. Voici un résumé de résultats à ce sujet, tous extraits du chapitre VII de [?].

On définit la fonction *puissance généralisée* sur Ω par

$$\Delta_{\mathbf{s}} = \Delta_1(x)^{s_1-s_2}\Delta_2(x)^{s_2-s_3}...\Delta_r(x)^{s_r},$$

avec $\mathbf{s} = (s_1,...,s_r) \in \mathbb{C}^r$. A l'image de la fonction gamma d'Euler, on se donne la *fonction gamma* du cône Ω par

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) = \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(x)}\Delta_{\mathbf{s}}(x)d^\times x,$$

où $d^\times x$ désigne toujours $\Delta(x)^{-\frac{n}{r}}dx$. Cette intégrale converge absolument si et seulement si

$$\mathrm{Re}(s_j) > (j-1)\frac{d}{2} \quad \forall j \in \{1,...,r\}.$$

A cette condition, $\Gamma_\Omega(\mathbf{s})$ coïncide avec le produit suivant de fonctions gamma d'Euler, qui donne également le prolongement méromorphe de $\Gamma_\Omega(\mathbf{s})$:

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\prod_{j=1}^r \Gamma\left(s_j - (j-1)\frac{d}{2}\right).$$

De même, on définit une fonction *Beta généralisée*, par l'intégrale qui suit, avec $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^r$:

$$B_\Omega(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \int_{\Omega\cap(e-\Omega)} \Delta_{\mathbf{s}-\frac{n}{r}}(x)\Delta_{\mathbf{t}-\frac{n}{r}}(e-x)dx.$$

L'intégrale est absolument convergente pour

$$\mathrm{Re}(s_j) > (j-1)\frac{d}{2}, \text{ et } \mathrm{Re}(t_j) > (j-1)\frac{d}{2}, \quad \forall\, j \in \{1,...,r\}.$$

Sur ce domaine, elle vaut :

$$B_\Omega(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{s})\Gamma_\Omega(\mathbf{t})}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s}+\mathbf{t})}.$$

Cette formule permet le prolongement méromorphe de B_Ω.

Notons $\mathbf{s}^* = (s_r,...,s_1)$ pour $\mathbf{s} = (s_1,...,s_r) \in \mathbb{C}^r$. Résumons pour finir les principales propriétés de la fonction puissance généralisée :

Proposition 2.10.1
Fixons $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$. La fonction puissance généralisée $x \mapsto \Delta_{\mathbf{s}}(x)$ satisfait les propriétés suivantes :

• *Identité de type Bernstein : pour $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^r$ tel que $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_r$, et $\partial(\Delta^*_{\mathbf{m}})$ l'opérateur différentiel défini par $\partial(\Delta^*_{\mathbf{m}}) \exp(\tau(x,y)) = \Delta^*_{\mathbf{m}}(y) \exp(\tau(x,y))$, on a :*

(2.4)
$$\partial(\Delta^*_{\mathbf{m}})\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \left(\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{m_{r-i+1}} \left(s_i - m_{r-i+1} + j + (r-i)\frac{d}{2}\right)\right) \Delta_{\mathbf{s}-\mathbf{m}^*}(x).$$

• *Puissance de l'inverse : Pour x inversible,*

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x^{-1}) = \Delta^*_{-\mathbf{s}^*}(x). \tag{2.5}$$

• *Action du parabolique minimal MAN : pour tout $(m,a,n) \in M \times A \times N$,*

$$\Delta_{\mathbf{s}}(manx) = \chi_{\mathbf{s}}(a)\Delta_{\mathbf{s}}(x) \tag{2.6}$$

où $\chi_{\mathbf{s}}$ est le caractère de A défini par

$$\chi_{\mathbf{s}}(a) := \exp(\lambda_{\mathbf{s}}(\log a)), \forall a \in A.$$

• *Action du groupe G : pour tout $(g,x) \in G \times V$,*

$$\Delta(g \cdot x) = Det(g)^{\frac{r}{n}} \Delta(x). \tag{2.7}$$

Tous ces résultats figurent dans [**?**]. L'identité de Bernstein est l'objet de la proposition VII.1.6, la puissance de l'inverse est la proposition VII.1.5(ii), l'action du sous-groupe parabolique minimal se déduit de la proposition VI.3.10 et de la remarque de la page 224, et l'action du groupe G apparaît dans la proposition III.4.3.

2.11 Caractérisation des NA-orbites.

Dans ce paragraphe, on généralise le paramétrage classique et la caractérisation suivante du cône convexe,

$$x \in \Omega \Leftrightarrow \Delta_i(x) > 0, \forall i \in \{1,...,r\},$$

aux NA-orbites ouvertes $\Omega_\varepsilon = NA \cdot e_\varepsilon$, où e_ε est défini pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$ par

$$e_\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + ... + \varepsilon_r e_r.$$

Commençons donner le parmétrage de l'orbite Ω_ε en coordonnées NA, en s'inspirant de la démonstration du cas classique Ω. Soit u un élément de V, écrivons sa décomposition suivant le repère de Jordan :

$$u = \sum_{i=1}^{r} u_i c_i + \sum_{1 \leq i < j \leq r} u_{ij}.$$

On se donne l'ensemble $V^+ = \{u \in V : u_i > 0, i = 1,...,r\}$. A l'instar de [**?**] page 112, posons :

$$\begin{aligned}
a_i(u) \quad &: \quad = P(c_1 + ... + c_{i-1} + u_i c_i + c_{i+1} + ... + c_r) \ \forall i \in \{1,...,r\}, \\
n_i(u) \quad &: \quad = \Upsilon_{c_i, u_{ii+1} + ... + u_{ir}} \ \forall i \in \{1,...,r-1\}, \\
t_V(u) \quad &: \quad = a_1(u) n_1(u) a_2(u) n_2(u) ... n_{r-1}(u) a_r(u).
\end{aligned}$$

Les résultats VI.3.8 et VI.3.9 de la même référence, adaptés à Ω_ε, se résument en :

Théorème 2.11.1
L'application $T_V^\varepsilon : V^+ \to \Omega_\varepsilon$, $u \mapsto t_V(u) e_\varepsilon$ est un difféomorphisme de Jacobien :

$$\det(D_u T_V^\varepsilon) = 2^r \left(\prod_{k=1}^{r} {\varepsilon_k}^{d(r-k)+1} \right) \left(\prod_{k=1}^{r} u_k^{d(r-k)+1} \right).$$

Preuve. Nous reproduisons le calcul par récurrence de [**?**] proposition VI.3.8, exécuté dans le cas particulier où $\varepsilon = (1,...,1)$. On considère la décomposition de x relative au repère de Jordan $(c_i)_{i=1}^r$

$$x = \sum_{j=1}^{r} x_i c_i + \sum_{1 \leq j < k \leq r} x_{jk}.$$

Soit

$$y = a_2(u) n_2(u) ... n_{r-1}(u) a_r(u) (\varepsilon_2 c_2 + ... + \varepsilon_r c_r).$$

Alors, d'après la formule **??**,

$$\begin{aligned}
x \quad &= \quad a_1(u) n_1(u) (\varepsilon_1 c_1 + y) \\
&= \quad \varepsilon_1 u_1^2 c_1 + \varepsilon_1 \sum_{j=2}^{r} u_1 u_{1j} + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sum_{j=2}^{r} ||u_{1j}||^2 c_j + 2\varepsilon_1 \sum_{2 \leq j < k \leq r} u_{1j} u_{1k} + y.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\left\{\begin{array}{c} x_j = \varepsilon_j u_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j-1}\varepsilon_k ||u_{kj}||^2 \\ x_{jk} = \varepsilon_j u_j u_{jk} + 2\sum_{l=1}^{j-1}\varepsilon_l u_{lj} u_{lk} \end{array}\right. .$$

On remarque alors que la matrice Jacobienne de ce changement de variable est triangulaire, et on trouve le Jacobien recherché. □

Proposition 2.11.2
Soit $x \in V$ tel que $\Delta_i(x) \neq 0$ pour tout entier i entre 1 et r, et soit $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$. Alors,

$$x \in \Omega_\varepsilon = NA \cdot e_\varepsilon \Leftrightarrow 0 < \Delta_i(x)\Delta_i(e_\varepsilon) = \Delta_i(x)\varepsilon_1 ... \varepsilon_i, \forall i \in \{1,...,r\}$$

En conséquence, les NA-orbites ouvertes dans V sont les Ω_ε, et de plus, $\Omega_\varepsilon = \Omega_{\varepsilon'}$ si et seulement si $\varepsilon = \varepsilon'$.

Preuve. Si $x = nae_\varepsilon$, avec $n \in N$, et $a = P(\sum_{i=1}^r a_i c_i) \in A$, $a_i > 0$ pour tout i, la formule **??** nous donne :

$$\Delta_i(x)\Delta_i(e_\varepsilon) = a_1^2 ... a_i^2 \Delta_i(e_\varepsilon)\Delta_i(e_\varepsilon) > 0.$$

Réciproquement, si x vérifie

$$0 < \Delta_i(x)\Delta_i(e_\varepsilon) = \Delta_i(x)\varepsilon_1 ... \varepsilon_i, \forall i \in \{1,...,r\},$$

d'après la proposition **??**, il existe $z \in V(c_1,1/2)$ et $u \in V(c_1,0)$ tels que

$$\Upsilon_{c_1,z}(\Delta_1(x)c_1 + u) = x.$$

En outre, $\Delta_1(x)\varepsilon_1 > 0$, de sorte que

$$\Delta_1(x)c_1 + u = P\left(a\right)\left(\varepsilon_1 c_1 + u\right)$$

avec

$$a = \sqrt{\Delta_1(x)\varepsilon_1} c_1 + c_2 + ... + c_r$$

Mais $\Upsilon_{c_1,z} \in N$ (c'est un produit de Υ_{1i}), et $P\left(a\right) \in A$, par conséquent, pour tout $j \in \{2,...,r\}$,

$$\Delta_j(x) = \Delta_1(x)\varepsilon_1\Delta_j(c_1 + u) = \varepsilon_1\Delta_1(x)\Delta'_{j-1}(u)$$

où Δ'_{j-1} est le $(j-1)$-ème mineur principale de l'algèbre $V(c_1,0)$ relativement au repère de Jordan $(c_i)_{i=2}^r$. Nous reproduisons l'argument précédent pour l'algèbre de Jordan $V(c_1,0)$, et nous obtenons la proposition par récurrence. □

2.12 Intégrales de Riesz.

En 1949, Riesz a introduit une famille de distributions sur le cône Lorentz (Ω en rang 2), afin de résoudre l'équation des ondes. Ces distributions se généralisent aux algèbres de Jordan. Considérons l'intégrale suivante :

$$R_\alpha(f) := \frac{1}{\Gamma_\Omega(\alpha)} \int_\Omega f(x)\Delta^\alpha(x)d^\times x. \tag{2.8}$$

Elle converge pour $\mathrm{Re}(\alpha) > (r-1)\frac{d}{2}$, lorsque f appartient à $\mathcal{S}(V)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide de V. La proposition suivante rappelle ses propriétés :

Proposition 2.12.1
La fonction $R_\alpha(f)$ se prolonge en une fonction holomorphe de α sur $\mathbb{C}$. Pour tout α, R_α est alors une distribution tempérée de V. Elle vérifie :

$$\begin{aligned} \partial(\Delta)R_\alpha &= R_{\alpha-1}, \\ R_\alpha * R_\beta &= R_{\alpha+\beta}, \\ R_0 &= \delta, \end{aligned}$$

où δ est la masse de dirac en 0. Enfin, la distribution de Riesz R_α est une mesure positive, si et seulement si α appartient à l'ensemble de Wallach :

$$\alpha \in \left\{0, \frac{d}{2}, \ldots, \frac{d}{2}(r-1)\right\} \cup \left]\frac{d}{2}(r-1), +\infty\right[.$$

Ces résultats sont mentionnés dans [**?**], théorème VII.2.2 et théorème VII.1.3. Nous allons présenter une application très simple, de ce résultat et du lemme suivant. Cette application fournira dans la suite une manière directe de calculer les fonctions c d'une certaine catégorie d'espaces ordonnés. Le lemme auxiliaire (proposition VII.2.4 et théorème VII.2.2 de [**?**]), est un résultat d'intégration dans les espaces de représentation d'algèbre de Jordan.

Lemme 2.12.2
Soit ϕ une représentation autoadjointe de l'algèbre V sur l'espace euclidien E de dimension N, d'application quadratique Q. Soit $f \in \mathcal{S}(V)$. Alors

$$\int_E f(Q(\xi))d\xi = \pi^{\frac{N}{2}} R_{\frac{N}{2r}}(f),$$

*où R_α est la distribution de Riesz définie par **??**. En particulier, c'est une mesure positive lorsque $N = rdj$, où $j = 0, \ldots, r-1$, ou lorsque $N > rd(r-1)$.*

Proposition 2.12.3
Considérons l'intégrale suivante, où ϕ est une représentation autoadjointe d'algèbre de Jordan euclidienne, sur un espace E de dimension $N \in rd\mathbb{N}$. On note Q la représentation quadratique et x un élément du cône Ω des carrés :

$$I_\lambda(x) := \int_{Q(\xi)\in(x-\Omega)} \Delta_\lambda(x - Q(\xi))d\xi.$$

Cette intégrale converge absolument si et seulement si :

$$Re(\lambda_k) > \frac{d}{2}(k-r) - 1, \forall k \in \{1,...,r\}.$$

Elle vaut alors :

$$I_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\frac{N}{2r}}(x)\pi^{\frac{N}{2}} \frac{\Gamma_\Omega\left(\lambda+\frac{n}{r}\right)}{\Gamma_\Omega\left(\lambda+\frac{N}{2r}+\frac{n}{r}\right)}.$$

Preuve. Commençons par effectuer le changement de variable suggéré par le lemme précédent, sous réserve de convergence absolue :

$$I_\lambda(x) = \int_{\overline{\Omega}\cap(x-\Omega)} \Delta_\lambda(x-y)d\mu(y),$$

où μ la mesure à support dans l'adhérence de Ω, donnée par $\pi^{\frac{N}{2}} R_{\frac{N}{2r}}$. A l'image de la preuve du théorème VII.1.7 de [**?**], considérons ensuite l'élément t de NA tel que $x = te$. On change à nouveau de variable, avec $z := t^{-1}y$, toujours lorsque l'intégrale converge :

$$\begin{aligned} I_\lambda(x) &= \Delta_{\lambda+\frac{N}{2r}}(x) \int_{\overline{\Omega}\cap(e-\Omega)} \Delta_\lambda(e-z)d\mu(z) \\ &= \Delta_{\lambda+\frac{N}{2r}}(x) I_\lambda(e). \end{aligned}$$

On imite alors l'argument de VII.1.7 de [**?**] :

$$\begin{aligned} I &= \Gamma_\Omega\left(\lambda + \frac{N}{2r} + \frac{n}{r}\right) I_\lambda(e) \\ &= \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(x)} I_\lambda(x)dx \\ &= \int_{\{(x,y)|x\in\Omega, x-y\in\Omega\}} e^{-\mathrm{tr}(x)}\Delta_\lambda(x-y)d\mu(y)dx \\ &= \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(z)}\Delta_\lambda(z)dz \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(y)}d\mu(y) \\ &= \Gamma_\Omega\left(\lambda+\frac{n}{r}\right)\pi^{\frac{N}{2}}, \end{aligned}$$

et on en déduit le domaine de convergence à partir de celui de la fonction $\Gamma_\Omega\left(\lambda+\frac{n}{r}\right)$, ainsi que l'expression de $I_\lambda(x)$. La valeur $\pi^{\frac{N}{2}}$ est la transformée de Laplace de μ en e, cf. [**?**] page 135. $\square$

Chapitre 3

Distributions de Riesz.

3.1 Structures d'espace préhomogène.

Les définitions et les résultats relatifs aux espaces préhomogènes présentés ici sont fidèles à [**?**], mais restreints au cas où le corps de base est $\mathbb{C}$, ce qui est suffisant dans les situations qui nous intéressent.

Un *espace préhomogène* est un triplet (L,ρ,W), où L est un groupe linéaire complexe algébrique connexe, W un espace vectoriel complexe de dimension finie, et ρ une représentation rationnelle de L sur W tels que L possède sur W une orbite Zariski-ouverte. Le complémentaire de cette *grosse orbite* $\mathcal{O}$ est appelé le *lieu singulier* $\mathcal{S}$ de (L,ρ,W).

Une fraction rationnelle non nulle f sur W est un *invariant relatif* de (L,ρ,W) s'il existe un caractère rationnel χ tel que :

$$f(gx) = \chi(g)f(x),\ \forall x \in W, \forall g \in L.$$

D'après la proposition 1.2.5 de [**?**], si nous notons $\mathcal{S}_1,...,\mathcal{S}_h$ les composantes irréductibles du lieu singulier $\mathcal{S}$, les polynômes irréductibles associés $g_1,...,g_h$ sont des invariants relatifs algébriquement indépendants, et tout invariant relatif est de la forme suivante :

$$cg_1^{m_1}...g_h^{m_h}, \qquad c \in \mathbb{C}, \text{ et } m_i \in \mathbb{Z},\ i = 1,...,h.$$

Ces invariants f_i sont appelés *invariants fondamentaux* de (L,ρ,W).

(L,ρ,W) est *irréductible* si la représentation ρ est irréductible.

Enfin, (L,ρ,W) est dit *régulier* si le Hessien de l'un de ses invariants fondamentaux est non nul sur la grosse orbite : il existe $i \in \{1,...,h\}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{O}$,

$$\det(D_{(x,x)}g_i) \neq 0.$$

Donnons immédiatement deux exemples en rapport avec notre étude.

Exemple 1. Désignons par ρ l'action naturelle de $GL(V^{\mathbb{C}})$ sur $V^{\mathbb{C}}$. Alors le couple $(G_{\mathbb{C}},\rho|_{G_{\mathbb{C}}},V^{\mathbb{C}})$ est un espace préhomogène régulier irréductible, d'invariant fondamental Δ_r. Il a été intensivement étudié, (cf. par exemple [?]) et constitue la catégorie des espaces préhomogènes réguliers de type parabolique commutatifs. □

Exemple 2. $(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}},\rho|_{A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}},V^{\mathbb{C}})$ est un espace préhomogène régulier en général non irréductible, d'invariants fondamentaux $\Delta_1,...,\Delta_r$. Il est par exemple signalé dans [?], et sa géométrie y est décrite. Toutefois l'analyse des fonctions zêta associées est moins explicite que celle de l'exemple précédent. □

Notons $L_{\mathbb{R}}$ et $W_{\mathbb{R}}$ respectivement le groupe des points réels de L et l'espace des points réels de W. Alors $\mathcal{O}\cap W_{\mathbb{R}}$ compte un nombre fini de composantes connexes, qui sont les $L_{\mathbb{R}}$-orbites ouvertes.

Exemple 1. $(G_{\mathbb{C}},\rho|_{G_{\mathbb{C}}},V^{\mathbb{C}})$: dans ce cas, $V^{\times}=\{\Delta_r\neq 0\}=\mathcal{O}\cap V_{\mathbb{R}}$ dans V est composé de $r+1$ G-orbites ouvertes dans V, qui sont les $\Omega_{pq}:=G\cdot e_{pq}$ où $e_{pq}:=e_p-e_q^*$ avec $p\in\{0,...,r\}$ et $p+q=r$. Ainsi, la *signature* d'un élément inversible x de V, qui est le couple (p,q) tel que $x\in\Omega_{pq}$, est un invariant de G. Le cône convexe associé à V est $\Omega=\Omega_{r0}$ et son opposé est $-\Omega=\Omega_{0r}$. Pour plus de détails, voir aussi la section **??**. □

Exemple 2. $(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}},\rho|_{A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}},V^{\mathbb{C}})$: le complémentaire de $V^{\#}=\{\Delta_1...\Delta_r\neq 0\}=\mathcal{O}\cap V_{\mathbb{R}}$ dans V compte 2^r orbites que l'on paramètre par $\varepsilon\in\{\pm1\}$. En effet, d'après la proposition **??**, les $\Omega_\varepsilon:=NA\cdot e_\varepsilon$ sont les 2^r orbites ouvertes distinctes qui composent $V^{\#}$. Le cône convexe de V est $\Omega=\Omega_{(1,...,1)}$ et son opposé $-\Omega=\Omega_{(-1,...,-1)}$. En vertu de ce qui précède, $\Omega_\varepsilon\subset\Omega_{pq}$ si et seulement si ε compte p valeurs 1 (et q valeurs -1). □

3.2 Fonctions zêta locales.

Afin d'étudier les fonctions zêta globales sur l'espace préhomogène (L,ρ,W), on introduit des intégrales auxilières Φ_i, appelées fonctions *zêta locales* dans [?].

Revenons à un préhomogène (L,ρ,W) et notons $\omega_1,...,\omega_h$ les orbites ouvertes de $L_{\mathbb{R}}$ dans $W_{\mathbb{R}}$. Pour $f\in\mathcal{S}(W_{\mathbb{R}})$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, $\alpha\in\mathbb{C}^r$ et $i\in\{1,...,h\}$, on considère l'intégrale suivante, pour une mesure de Lebesgue sur $W_{\mathbb{R}}$:

$$\Phi_i(f;\alpha):=\int_{\omega_i}f(x)|g_1(x)|^{\alpha_1}...|g_h(x)|^{\alpha_h}dx.$$

Un cas particulier du lemme 5.2 page 456 de [**?**] montre que :

Proposition 3.2.1
Φ_i est absolument convergente si $Re(\alpha_i) > 0$ pour tout entier i entre 1 et r. Elle se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}^h$. Ses pôles sont parmi ceux d'un produit de facteurs gamma du type :

$$\Gamma(a_1\alpha_1 + ... + a_h\alpha_h + b)$$

où les coefficients sont rationnels. Enfin, $\Phi_i(.;\alpha)$ définit un élément $\mathcal{S}'(W_{\mathbb{R}})$ l'espace des distributions tempérées, dépendant méromorphiquement de α.

Toutefois, l'argument, abstrait, ne permet pas de préciser la forme des facteurs gamma. Dans certains cas particuliers, comme celui de l'exemple 1, le calcul de ces facteurs a été réalisé.

Une stratégie envisageable pour expliciter ces facteurs peut-être :

• Préciser, quand c'est possible, le domaine de convergence absolue des Φ_i, en fonction de la forme particulière des g_j et des orbites.

• Calculer explicitement les polynômes de Bernstein-Sato B_k correspondant aux g_j, dont l'existence est assurée (de façon non constructive) par le résultat suivant de C.Sabbah :

Théorème 3.2.2
Pour $k = 1,...,r$, il existe un opérateur différentiel sur V, que l'on note $P_k(x,\alpha,\partial)$, polynômial en toutes ses variables, et tel que :

$$P_k(x,\alpha,\partial)g_1^{\alpha_1}...g_h^{\alpha_h} = B_k(\alpha)g_1^{\alpha_1}...g_{k-1}^{\alpha_{k-1}}g_k^{\alpha_k-1}g_{k+1}^{\alpha_{k+1}}...g_h^{\alpha_h}, \tag{3.1}$$

où les facteurs irréductibles intervenant dans la décomposition de $B_k \in \mathbb{C}[\alpha]$ sont tous de degré 1.

En effet, l'identité suivante, résultant d'une simple intégration par parties, permet de décaler le domaine de définition de Φ_i de -1 dans la direction de $\mathbf{1}_k$:

$$\Phi_i(f;\alpha-\mathbf{1}_k) = \frac{\varepsilon_{ik}}{B_k(\alpha)}\Phi_i(P_k(x,\alpha)^*f;\alpha),$$

où $P_k(x,\alpha)^*$ est le dual de $P_k(x,\alpha)$ pour la mesure de Lebesgue, et ε_{ik} le signe de g_k sur ω_i.

3.3 L'exemple de $(G_{\mathbb{C}},\rho|_{G_{\mathbb{C}}},V^{\mathbb{C}})$.

Les fonctions zêta locales sont ici les

$$\Phi_{pq}(f;s) := \int_{\Omega_{pq}} f(x)|\det(x)|^s dx,$$

qui convergent absolument lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$. Remarquons que dans le cas du cône convexe Ω_{r0}, la fonction zêta locale $\Phi_{r0}(.;s)$ coïncide, au facteur gamma près, avec la distribution de Riesz R_s.

L'identité de Bernstein-Sato **??** est connue explicitement. En effet, un cas particulier de la propriété **??** nous donne :

$$\partial(\Delta_r)\Delta_r^s(x) = s\left(s+\frac{d}{2}\right)...\left(s+(r-1)\frac{d}{2}\right)\Delta_r^{s-1}(x), \tag{3.2}$$

avec s complexe et $\partial(\Delta_r)$ tel que $\partial(\Delta_r)\exp(\tau(x,y)) = \Delta_r(y)\exp(\tau(x,y))$.

La stratégie mise en oeuvre dans le paragraphe précédent nous permet de conclure que les pôles $\Phi_{pq}(.;s)$ sont simples et appartiennent au lieu des pôles de :

$$\Gamma(s+1)\Gamma\left(s+\frac{d}{2}+1\right)...\Gamma\left(s+(r-1)\frac{d}{2}+1\right).$$

Toutefois, tous les pôles de ces facteurs ne sont pas nécessairement des pôles de $\Phi_{pq}(.;s)$. On peut voir à ce sujet [**?**], où l'on exhibe les pôles veritables de $\Phi_{pq}(.;s)$.

3.4 L'exemple de $(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}},\rho|_{A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}},V^{\mathbb{C}})$.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^r$ et $x \in V^{\#} = \{y \in V : \Delta_i(y) \neq 0, i = 1,...,r\}$, on pose :

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha(x) \quad &: \quad = \Delta_1(x)^{\alpha_1}...\Delta_r(x)^{\alpha_r}, \\ |\Delta|^\alpha(x) \quad &: \quad = |\Delta_1(x)|^{\alpha_1}...|\Delta_r(x)|^{\alpha_r}. \end{aligned}$$

Précisons le lien entre les notations Δ^α et $\Delta_{\mathbf{s}}$: $\Delta^\alpha = \Delta_{\mathbf{s}}$ si et seulement si :

$$s_i - s_{i+1} = \alpha_i \quad \forall\ i \in \{1,...,r-1\}, \text{ et } s_r = \alpha_r,$$

ce qui équivaut à

$$s_i = \alpha_i + ... + \alpha_r \quad \forall i \in \{1,...,r\}.$$

Dans ce cadre, les fonctions zêta locales sont les

$$\Phi_\varepsilon(f;\alpha) := \int_{\Omega_\varepsilon} f(x)|\Delta|^\alpha(x)dx,$$

qui convergent absolument lorsque $\mathrm{Re}(\alpha_i) > 0$. Nous nous proposons de déterminer dans la section **??** des identités de type Bernstein, qui généraliserons **??**. Voici l'exemple des orbites convexes, dans lequel l'identité de type Bernstein classique des algèbres de Jordan permet le prolongement analytique :

Exemple. Dans le cas du cône $\Omega_{(1,\dots,1)}$, nous avons d'après la formule **??**,

$$\partial(\Delta_r)\Delta^\alpha(x) = \left\{\prod_{j=1}^{r}\left(\alpha_j + \dots + \alpha_r + (r-j)\frac{d}{2}\right)\right\}\Delta^{\alpha-\mathbb{1}_r}(x),$$

ce qui nous permet de déterminer B_r comme la partie entre accolades. Les autres B_j ne sont pas connus explicitement. Mais selon [**?**], théorème VII.2.6, $\Phi_{(1,\dots,1)}(f;\alpha)$ converge absolument si

$$\mathrm{Re}(\alpha_j + \dots + \alpha_r) \geq -1 + \frac{d}{2}(j-r).$$

Ainsi, le décalage dans la direction de $\mathbb{1}_r$ suffit pour obtenir le prolongement méromorphe de $\Phi_{(1,\dots,1)}(.;\alpha)$, dont les pôles sont alors parmi ceux de

$$\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\alpha_j + \dots + \alpha_r + (r-j)\frac{d}{2} + 1\right). \square$$

3.5 Polynômes sur une algèbre de Jordan.

Dans le chapitre XI de [**?**], les auteurs étudient la décomposition en sous-espaces irréductibles de la représentation quasi-régulière à gauche de G sur les polynômes.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de l'algèbre de Jordan $V^{\mathbb{C}}$. On munit $\mathcal{P}$ du produit scalaire de Fisher :

$$(p,q)_F := (\partial(p)\overline{q}(z))|_{z=0}, \forall p,q \in \mathcal{P},$$

où l'opérateur $\partial(p)$ est défini par la relation suivante, avec $\tau(z,w) = \mathrm{tr}(zw)$:

$$\partial(p)\exp(\tau(z,w)) = p(w)\exp(\tau(z,w)).$$

On considère la représentation $(\pi,\mathcal{P})$ de G donnée par

$$\pi(g)p = p \circ g^{-1},\ \forall p \in \mathcal{P} \text{ et } \forall g \in G.$$

Définissons à présent les polynômes qui jouront le rôle de vecteurs de plus haut poids restreint pour les représentations irréductibles de la décomposition de $(\pi,\mathcal{P})$. On dit qu'un r-uplet d'entiers $\mathbf{m}$ est *dominant*, et on note $\mathbf{m} \geq 0$, si et seulement si :

$$m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_r \geq 0.$$

Considérons ensuite les polynômes suivants, avec $\mathbf{m}$ dominant :

$$\Delta_{\mathbf{m}} = \Delta_1(x)^{m_1-m_2}\Delta_2(x)^{m_2-m_3}...\Delta_r(x)^{m_r}.$$

Ces polynômes satisfont le théorème suivant ([**?**], XI.2.4) :

Théorème 3.5.1
Si $\mathbf{m}$ est dominant, on désigne par $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ le sous-espace invariant par π engendré par $\Delta_{\mathbf{m}}$. Les $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ sont donc irréductibles. En outre, ils sont deux à deux distincts et inéquivalents comme sous-espaces irréductibles, et on a la somme directe orthogonale suivante :

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{\mathbf{m}\geq 0} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}.$$

Citons à présent un résultat, extrait de la proposition A5 page 35 de [**?**], qui donne un généralisation de la théorie du plus haut poids des représentations d'algèbres de Lie semi-simples complexes à certaines représentations d'algèbres de Lie réductives réelles.

Théorème 3.5.2
Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ la décomposition d'Iwasawa d'une algèbre de Lie réductive réelle $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Soit $(\rho,\mathcal{E})$ une représentation irréductible réelle involutive ($\rho(X^*) = \rho(X)^*, \forall X \in \mathfrak{g}$). Alors, d'une part, il existe $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, appelé plus haut poids restreint de $(\rho,\mathcal{E})$, tel que

$$\mathcal{E}^{\mathfrak{n}} = \mathcal{E}_\lambda := \{v \in \mathcal{E} \mid (\forall X \in \mathfrak{a}) : Xv = \lambda(X)v\},$$

et que cet espace soit un $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$-module irréductible. Et d'autre part, l'ensemble des poids restreints $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ de $(\rho,\mathcal{E})$ satisfait à :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}} \subseteq \left(\lambda - \mathbb{N}[\Delta^+]\right) \cap conv(\mathcal{W}\cdot\lambda),$$

où $\mathcal{W}$ est le groupe de Weyl associé au système de racines restreintes $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$.

Remarquons que la représentation $(\pi,\mathcal{P}_{\mathbf{m}})$ est involutive : $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ muni du produit de Fisher est un espace de Hilbert, et π satisfait d'après [?], XI.1.2 :

$$\pi(X^*) = \pi(X)^*, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Corollaire 3.5.3
Soit $\mu \in \mathbb{C}^r$ tel que λ_μ soit un poids de la représentation $(\pi,\mathcal{P}_{\mathbf{m}})$. Alors on a :

$$\lambda_\mu \in \left(\lambda_{\mathbf{m}} - \mathbb{N}[\Delta^+]\right) \cap conv(\mathcal{W}\cdot\lambda_{\mathbf{m}}). \tag{3.3}$$

Preuve. D'après le corollaire XI.2.5 de [?], $\lambda_{\mathbf{m}}$ est le plus haut poids restreint de la représentation $(\pi,\mathcal{P}_{\mathbf{m}})$. Le résultat précédent permet alors de conclure. □

3.6 Identités de type Bernstein pour les Δ^α.

Dans ce paragraphe, nous proposons une famille d'opérateurs différentiels, dont nous montrerons qu'ils sont polynômiaux et qu'ils satisfont certaines identités de type Bernstein, relativement aux distributions zêta.

Remarquons que la formule **??** donne une série d'identités de Bernstein. Nous avons exploité l'identité relative à $\partial(\Delta_r)$ dans la section **??**, afin de prolonger les distributions de Riesz associées aux cônes convexes. Toutefois, les autres identités n'apportent rien à l'étude du problème général, comme le montre leur expression en termes de Δ^α (au lieu de $\Delta_{\mathbf{s}}$) :

$$\partial(\Delta_i^*)\Delta^\alpha(x) = \left(\prod_{j=r-i+1}^{r}\left(\alpha_j + ... + \alpha_r + (r-j)\frac{d}{2}\right)\right)\Delta^{\alpha+\mathbb{1}_{r-i}-\mathbb{1}_r}(x).$$

En effet, la seule direction vers laquelle le décalage est négatif est donnée par $\mathbb{1}_r$, et ce, pour n'importe quel opérateur du type $\partial(\Delta_i^*)$. Il faut donc rechercher d'autres opérateurs pour les directions $\mathbb{1}_1,...,\mathbb{1}_{r-1}$:

Définition 3.6.1
Pour tout $x \in V^\# = \{x \in V : \Delta_i(x) \neq 0; i = 1,...,r\}$, tout r-uplet complexe α, et tout entier $k \in \{1,...,r\}$, on pose :

$$D_k(\alpha,x) := \left(\Delta_{k+1}(x)^{1+\alpha_{k+1}}...\Delta_r(x)^{1+\alpha_r}\right)\circ\partial(\Delta_k)\circ\left(\Delta_{k+1}(x)^{-\alpha_{k+1}}...\Delta_r(x)^{-\alpha_r}\right),$$

où $C^\infty(V^\#)$ opère sur $C^\infty(V)$ par la multiplication usuelle des fonctions.

On va montrer que, pour des raisons d'homogénéité par rapport à la représentation π, ces opérateurs sont polynômiaux en α et x. Donnons tout d'abord un lemme, analogue fort du fait qu'un opérateur différentiel homogène de degré k annule les polynômes de degré strictement inférieur :

Lemme 3.6.1
Soient $\mathbf{m}$ *et* $\mathbf{n}$ *dominants et tels qu'il existe un entier* $i \in \{1,\dots,r\}$ *vérifiant* $n_i > m_j$ *pour tout* $j \in \{1,\dots,r\}$*. Alors on a :* $\partial(\mathcal{P}_{\mathbf{n}})\mathcal{P}_{\mathbf{m}} = 0$.

Preuve. Commençons par démontrer que $\partial(\Delta_{\mathbf{n}})\mathcal{P}_{\mathbf{m}} = 0$. Soit $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, un vecteur de poids restreint λ_μ. D'après la formule **??**, on a d'une part

$$\mu \in \mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbb{N}[\mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_1,\dots,\mathbf{1}_r - \mathbf{1}_{r-1}],$$

donc $\mu_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. D'autre part, $\lambda_\mu \in \mathrm{conv}(\mathcal{W}\cdot\lambda_{\mathbf{m}})$, donc

$$0 \leq \min_{j=1..r} m_j \leq \mu_i \leq \max_{j=1..r} m_j < n_i.$$

Posons pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} a_t &= P(e + (t-1)c_i) = P(\exp(\log(t)c_i)) \\ &= \exp L(2\log(t)c_i) = \exp L(\log(t^2)c_i), \end{aligned}$$

d'après **??**. C'est un élément de A. En vertu de **??** :

$$\pi(a_t)\Delta_{\mathbf{n}} = t^{-2n_i}\Delta_{\mathbf{n}} \text{ et } \pi(a_t^{-1})p = t^{2\mu_i}p.$$

En appliquant la formule de la démonstration XI.1.2 page 222 de [**?**],

$$\partial(p) \circ \pi(g) = \pi(g) \circ \partial(\pi(g^*)p), \tag{3.4}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^{2(n_i-\mu_i)}}\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p &= t^{2\mu_i}\partial(\pi(a_t)\Delta_{\mathbf{n}})p \\ &= t^{2\mu_i}\pi(a_t^{-1})(\partial(\Delta_{\mathbf{n}}) \circ \pi(a_t)p) \\ &= \pi(a_t^{-1})(\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p). \end{aligned}$$

Or le membre de droite est polynomial en t, car $\{\pi(a_t^{-1})Q\}(X) = Q(P(e + (t-1)c_i)X)$ est polynômial en t pour tout polynôme Q. Et le membre de gauche n'est borné près de $t = 0$ que si $\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p = 0$. On a donc effectivement $\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p = 0$.

En utilisant la formule **??**, et le fait que $\mathcal{P}_\mathbf{n}$ est engendré par $\pi(G)\Delta_\mathbf{n}$, on généralise la formule $\partial(\Delta_\mathbf{n})p = 0$ à $\mathcal{P}_\mathbf{n}$. $\square$

Théorème 3.6.2
Pour tout entier k compris entre 1 et r, $D_k(\alpha,x)$ est un opérateur différentiel polynômial en x et α.

Preuve. Nous allons démontrer que le symbole de $D_k(\alpha,x)$ est polynômial en toutes ses variables. A cette fin, deux étapes seront nécessaires. On va commencer par expliciter l'action de $\partial(\Delta_k)$ sur $\bigotimes_{j=1}^h C^\infty(V)$, puis on va l'appliquer aux $h = r - k + 1$ fonctions $\Delta_{k+1}(x)^{-\alpha_{k+1}},...,\Delta_r(x)^{-\alpha_r}$ et $\exp\tau(x,y)$.

• *Etape 1 : réalisation de $\partial(p)$ sur $\bigotimes_{j=1}^h C^\infty(V)$.*

L'application

$$m : \prod_{j=1}^h C^\infty(V) \to C^\infty(V),(f_1,...,f_h) \mapsto f_1...f_h$$

étant h-linéaire, elle se factorise par la surjection $s : \prod_{j=1}^h C^\infty(V) \to \bigotimes_{j=1}^h C^\infty(V)$ en une unique :

$$\widetilde{m} : \bigotimes_{j=1}^h C^\infty(V) \to C^\infty(V) \text{ telle que } \widetilde{m} \circ s = u.$$

Montrons pour p homogène de degré k, qu'il existe un opérateur linéaire de $\bigotimes_{j=1}^h C^\infty(V)$

$$\widetilde{\partial}(p) \in \bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_i|=k} \bigotimes_{i=1}^h \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_i})$$

tel que

$$\widetilde{m} \circ \widetilde{\partial}(p) = \partial(p) \circ \widetilde{m}.$$

On raisonne par récurrence sur le degré d'homogénéité. Pour $k = 0$, c'est évident. Si Y est un monôme de $\mathcal{P}$, la formule de dérivation classique nous donne pour tout $f_i \in C^\infty(V)$, $i = 1,...,h$:

$$\partial(Y) \circ m(f_1,...,f_h) = \sum_{i=1}^h m(f_1,...,f_{i-1},\partial(Y)f_i,f_{i+1},...,f_h),$$

donc

$$\partial(Y) \circ \widetilde{m} = \widetilde{m} \circ \left(\sum_{i=1}^h \otimes_{j=1}^{i-1} 1 \otimes \partial(Y) \otimes_{j=i+1}^h 1 \right).$$

Or pour tout $i = 1,...,h$:

$$\left(\otimes_{j=1}^{i-1} 1 \otimes \partial(Y) \otimes_{j=i+1}^{h} 1\right) \circ \left(\bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l| = k-1} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}) \right) \subset \bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l| = k | \mathbf{d}_i| \geq 1} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l})$$
$$\subset \bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l| = k} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}).$$

Ainsi, nous démontrons par récurrence le résultat attendu, en écrivant p homogène de degré k comme une somme de produits d'un monôme et d'un polynôme homogène de degré $k-1$.

Prouvons à présent que pour $p \in \mathcal{P}_{<k>}$,

$$\widetilde{\partial}(p) \in \bigoplus_{\sum n_i = k} \bigotimes_{i=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{<n_i>}) \tag{3.5}$$

où $< j >$ désigne le r-uplet dont les j premières entrées valent 1 et les $r - j$ autres valent 0.

Donnons nous une base orthonormée $(p_\alpha) = (p_\alpha^1 \otimes ... \otimes p_\alpha^h)$ de l'espace suivant, muni du produit hermitien $\langle .,. \rangle_F$ hérité de celui des $\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}$,

$$\bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l| = k} \bigotimes_{l=1}^{h} \mathcal{P}_{\mathbf{d}_l},$$

telle que pour tout α,

$$p_\alpha \in \bigotimes_{l=1}^{h} \mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}$$

pour un certain $(\mathbf{d}_l)_{l=1}^{h}$. L'espace

$$\bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l| = k} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l})$$

est muni du produit hermitien provenant de $\langle .,. \rangle_F$:

$$\langle \partial(p), \partial(q) \rangle_F := \langle p, q \rangle_F \ \ \forall p,q \in \bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l| = k} \bigotimes_{l=1}^{h} \mathcal{P}_{\mathbf{d}_l},$$

qui fait de $(\partial(p_\alpha)) = (\partial(p^1_\alpha)\otimes ... \otimes\partial(p^h_\alpha))$ une base orthonormée. Considérons la décomposition de $\widetilde{\partial}(p)$ dans cette base : il existe des complexes λ_α tels que

$$\widetilde{\partial}(p) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial(p^1_\alpha) \otimes ... \otimes \partial(p^h_\alpha).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda_\beta &= \sum_\alpha \lambda_\alpha \left\langle \partial(p_\alpha),\partial(p_\beta)\right\rangle_F \\
&= \sum_\alpha \lambda_\alpha \left(\partial(p^1_\alpha)p^1_\beta \otimes ... \otimes \partial(p^h_\alpha)p^h_\beta\right)|_0 \\
&= \widetilde{m}\circ\widetilde{\partial}(p)\Big|_0 p_\beta \\
&= \partial(p)|_0\,(p^1_\beta ... p^h_\beta) \\
&= \left\langle p,p^1_\beta ... p^h_\beta\right\rangle_F \\
&= \left\langle \partial(p^j_\beta)p,p^1_\beta ... p^{j-1}_\beta p^{j+1}_\beta p^h_\beta\right\rangle_F ,
\end{aligned}$$

pour tout $j = 1,...,h$. Si $p_\beta \notin \bigotimes_{i=1}^h \partial(\mathcal{P}_{<n_i>})$ pour certains n_i, il existe j tel que $p^j_\beta \in \mathcal{P}_{\mathbf{d}_j}$ avec $\mathbf{d}_j$ ayant l'un de ses coefficients strictement supérieur à 1 :

$$\mathbf{d}^i_j > 1 =< k >_1 = ... < k >_k > 0 =< k >_{k+1} = ... =< k >_r ,$$

et nous sommes dans le cadre d'application du lemme **??**. Ainsi, $\partial(p^j_\beta)p = 0$ et par conséquent, $\lambda_\beta = 0$. Nous avons bien, en conclusion, la formule **??**.

• *Etape 2 : étude de* $\partial(\mathcal{P}_{<k>})\Delta(x)^\alpha$.

La proposition XI.5.1 page 235 de [**?**] indique que pour tout $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ et $x \in V^\times$,

$$\partial(p)\Delta(x)^\alpha = \left(\prod_{j=1}^r \prod_{i=0}^{m_j-1}\left(\alpha - i + \frac{d}{2}(j-1)\right)\right)\Delta(x)^\alpha p(x^{-1}). \tag{3.6}$$

Par ailleurs, comme le montre la formule **??**,

$$\Delta_k(x^{-1}) = \Delta^*_{(0..0,-1..-1)}(x) = \Delta^*_{(1..1,0..0)}(x)\Delta(x)^{-1} = \Delta^*_{r-k}(x)\Delta(x)^{-1}.$$

Cette relation s'étend à $\mathcal{P}_{<k>}$ car d'une part cet espace est engendré par $\pi(G)\Delta_k$, et d'autre part on a la formule **??** : $\Delta(gx) = \det^{\frac{r}{n}}(g)\Delta(x)$. Par conséquent,

$$\forall p \in \mathcal{P}_{<k>}, \exists q \in \mathcal{P}_{<r-k>} \mid (\forall x \in V^\times)\ p(x^{-1}) = q(x)\Delta(x)^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\partial(p)\Delta(x)^{\alpha} &= \prod_{j=1}^{k}\left(\alpha+\frac{d}{2}(j-1)\right)\Delta(x)^{\alpha}p(x^{-1})\\ &= \prod_{j=1}^{k}\left(\alpha+\frac{d}{2}(j-1)\right)q(x)\Delta(x)^{\alpha-1}\\ &= Q_k(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

où Q_k est le polynôme en x et α donné par :

$$Q_k(\alpha,x)=\prod_{j=1}^{k}\left(\alpha+\frac{d}{2}(j-1)\right)q(x).$$

• *Conclusion :*

On pose $f_i(x)=\Delta_{k+i}(x)^{-\alpha_{k+i}}$ pour $i=1,...,r-k$ et $f_0(x)=\exp(\tau(x,y))$. D'après la première étape, l'opérateur $\partial(\Delta_k)\in\partial(\mathcal{P}_{<k>})$ agit ainsi sur $f_0(x)...f_{r-k}(x)$:

$$\partial(\Delta_k)f_0(x)...f_{r-k}(x)=\sum_{(k=\sum n_i)}\prod_{i=0}^{r-k}\partial(p_{n_i})f_i(x)$$

où $p_{n_i}\in\mathcal{P}_{<n_i>}$. Les facteurs en $\partial(p_{n_0})f_0(x)$ sont de la forme $p_{n_0}(y)\exp(\tau(x,y))$.

Considérons les facteurs $\partial(p_{n_i})f_i(x)$ pour $i\in\{1..r-k\}$. On applique le résultat de la seconde étape à l'algèbre V_{k+i}. Il vient :

$$\partial(p_{n_i})f_i(x)=Q_{n_i}(\alpha_{k+i},x)f_i(x)\Delta_{k+i}(x)^{-1}.$$

Ainsi chaque terme se présente sous la forme :

$$Q(\alpha,x,y)f_0(x)\frac{f_1(x)}{\Delta_{k+1}(x)}...\frac{f_{r-k}(x)}{\Delta_{r(x)}}=Q(\alpha,x,y)\left(\prod_{j=k+1}^{r}\Delta_j^{1+\alpha_j}(x)\right)^{-1}\exp(\tau(x,y))$$

avec Q polynômial en ses trois variables. D'où nous obtenons :

$$D_k(\alpha,x)\exp(\tau(x,y))=Q(\alpha,x,y)\exp(\tau(x,y)),$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Comme D_k, défini sur $V^{\#}$, est polynômial, il s'étend en un opérateur polynômial sur V tout entier.

3.7 Etude de l'action de D_k sur Δ^α.

Proposition 3.7.1
Sur V, on a pour chaque entier k compris entre 1 et r, l'identité suivante :

$$D_k(\alpha,x)\Delta(x)^\alpha = b_k(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbb{1}_k+\mathbb{1}_{k+1}+\ldots+\mathbb{1}_r}$$

où

$$\alpha - \mathbb{1}_k + \mathbb{1}_{k+1} + \ldots + \mathbb{1}_r = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_k - 1,\alpha_{k+1}+1,\ldots,\alpha_r+1),$$

et

$$b_k(\alpha) = \prod_{i=1}^{k}\left(\alpha_i + \ldots + \alpha_k + (k-i)\frac{d}{2}\right).$$

Preuve. On utilise la formule **??** dans V_k, appliquée à $\Delta_{\mathbf{s}(\alpha)}$ où $\mathbf{s}(\alpha)_i = \alpha_i + \ldots + \alpha_k$ pour $i = 1,\ldots,k$ et $\mathbf{m} =< k >= (1,\ldots,1)$. On trouve :

$$\partial(\Delta_k)\Delta_{\mathbf{s}(\alpha)} = \left(\prod_{i=1}^{k}\left(s_i + (k-i)\frac{d}{2}\right)\right)\Delta^{(k)}_{\mathbf{s}(\alpha)-1},$$

où $\mathbf{s}(\alpha)_i - 1 = (\alpha_i + \ldots + \alpha_k - 1) = \mathbf{s}(\alpha - \mathbb{1}_k)_i$. Puis, en multipliant par :

$$\prod_{j=k+1}^{r}\Delta_j(x)^{1+\alpha_j}$$

nous obtenons le résultat. □

Remarque 3.7.1
Nous observons que pour k fixé, D_k ne dépend effectivement que des complexes $\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_r$, alors que b_k ne dépend lui que de $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$.

3.8 Discussion sur l'unicité des B_k.

Il n'existe pas, à notre connaissance, de résultat d'unicité concernant le polynôme B_k de la formule **??**.

Dans les paragraphes précédents, on a mis en évidence une famille explicite d'opérateurs D_k qui agissent sur Δ^α en décalant l'exposant de

$$-\mathbb{1}_k + \mathbb{1}_{k+1} + \ldots + \mathbb{1}_r.$$

En composant successivement ces opérateurs, avec un bon choix de α à chaque étape, on obtient un opérateur du type P_k décrit dans la formule

??. En fonction de l'ordre de composition, l'opérateur P_k et le polynôme B_k obtenus varient, comme vont l'illuster les deux exemples suivants.

Exposons d'abord le procédé de construction des deux exemples.

Dans le premier exemple, nous allons d'abord appliquer $D_k(\alpha,x)$, afin d'abaisser de 1 l'exposant d'indice k. Mais alors, les exposants suivant vont être incrémentés de 1. Nous allons ensuite appliquer D_{k+1}, avec le nouveau paramètre $\alpha - \mathbf{1}_k + \mathbf{1}_{k+1} + ... + \mathbf{1}_r$. A cette étape, le k-ème exposant est diminué de 1, le $k+1$ème est inchangé et les suivants sont augmentés de 2. On réitère l'algorithme, en appliquant D_{k+2} deux fois (en prenant soin de changer le paramètre à chaque étape), puis D_{k+3} quatre fois, et ainsi du suite jusqu'à D_r, appliqué 2^{r-k-1} fois. Le décalage final est donc de $-\mathbf{1}_k$.

Dans le second exemple, on choisit l'ordre de composition inverse : on commence par 2^{r-k-1} applications de D_r, puis 2^{r-k-2} applications de D_{r-1}, jusqu'à D_{k+1} appliqué une fois, et enfin une application de D_k. A chaque étape, il faut prendre soin de modifier l'argument de chaque opérateur. On obtient d'une autre façon le décalage $-\mathbf{1}_k$.

Exemple 1. Considérons les opérateurs suivants, où le produit désigne la composition, effectuée dans l'ordre coissant des indices, et où $j \in \{k+1,...,r\}$:

$$C_{jk}(\alpha,x) := \prod_{i=1}^{2^{j-k-1}} D_j\left(\mathbf{a}(\alpha,k,j),x\right),$$

où l'argument $\mathbf{a}(\alpha,k,j)$ est donné par :

$$\mathbf{a}(\alpha,k,j) = \alpha - \mathbf{1}_k + (2^{j-k-1} - (i-1))\mathbf{1}_j + \sum_{l=j+1}^{r} \{i-1+2^{j-k-1}\}(\mathbf{1}_{j+1} + ... + \mathbf{1}_r).$$

Alors, nous avons :

$$C_{jk}(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha-\mathbf{1}_k-2^{j-k-1}(1_j+...+1_r)} = c_{jk}(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbf{1}_k-2^{j-k}(\mathbf{1}_{j+1}+...+\mathbf{1}_r)}.$$

où

$$c_{jk}(\alpha) = \prod_{i=1}^{2^{j-k-1}} b_j\left(\alpha - \mathbf{1}_k + (2^{j-k-1} - (i-1))\mathbf{1}_j\right)$$

D'où, l'opérateur $E_k^+(\alpha,x) := C_{r,k}(\alpha,x) \circ ... \circ C_{k+1,k}(\alpha,x) \circ D_k(\alpha,x)$ vérifie :

$$E_k^+(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha} = B_k^+(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbf{1}_k},$$

avec

$$B_k^+(\alpha) = b_k(\alpha) \prod_{j=k+1}^{r} \left(\prod_{i=1}^{2^{j-k-1}} b_j\left(\alpha - \mathbf{1}_k + (2^{j-k-1} - (i-1))\mathbf{1}_j\right) \right). \square$$

Exemple 2. Considérons une seconde famille d'opérateurs, avec les mêmes conventions pour le produit et la somme, et avec $j \in \{k+1,...,r\}$:

$$A_{jk}(\alpha,x) := \prod_{i=1}^{2^{j-k-1}} D_j \left(\alpha - (i-1)\mathbf{1}_j + \sum_{l=j+1}^{r} \{i-1-2^{j-k}\}(\mathbf{1}_{j+1}+...+\mathbf{1}_r), x \right),$$

avec la convention qu'une somme d'indice inital strictement supérieur à l'indice final est nulle. Alors, nous avons :

$$A_{jk}(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha-2^{j-k}(\mathbf{1}_{j+1}+...+\mathbf{1}_r)} = a_{jk}(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-2^{j-k-1}(\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_{j+1}+...+\mathbf{1}_r)}.$$

où a_{jk} est le polynôme :

$$a_{jk}(\alpha) = \prod_{l=1}^{2^{j-k-1}} b_j\,(\alpha - (l-1)\,\mathbf{1}_j)$$

D'où, l'opérateur $E_k^-(\alpha,x) := D_k(\alpha-(\mathbf{1}_k+...+\mathbf{1}_r),x)\circ A_{k+1,k}(\alpha,x)\circ ...\circ A_{r,k}(\alpha,x)$ vérifie :

$$E_k^-(\alpha,x)\Delta(x)^\alpha = B_k^-(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbf{1}_k},$$

avec

$$B_k^-(\alpha) = b_k(\alpha)\prod_{j=k+1}^{r}\left(\prod_{i=1}^{2^{j-k-1}} b_j\,(\alpha-(i-1)\,\mathbf{1}_j)\right). \square$$

L'interêt de ces deux exemples, est de réduire le nombre de pôles fictifs, dans l'étude du prolongement analytique. En effet, seuls les zéros communs aux deux polynômes de Bernstein peuvent donner naissance à un pôle effectif.

Proposition 3.8.1
Le plus grand commun diviseur de $B_k^-(\alpha)$ et $B_k^+(\alpha)$ est $\widetilde{B}_k(\alpha)$.

Preuve. Le polynôme $b_k(\alpha)$ est un facteur commun. Observons ensuite que, lorsque $j \neq k$, les facteurs de degré 1 de b_j et b_k sont deux à deux distincts (si $j < k$, les facteurs de b_k contiennent α_k, mais pas ceux de b_j.). Fixons deux vecteurs $\beta,\gamma \in \mathbb{C}^r$. Les polynômes en α donnés par $b_j(\alpha+\beta)$ et $b_j(\alpha+\gamma)$ ont des facteurs communs si et seulement s'il existe $l \leq j$ tel que

$$\beta_l + ... + \beta_j = \gamma_l + ... + \gamma_j.$$

Dans $B_k^+(\alpha)$, les facteurs en b_j sont du type $b_j(\beta+\alpha)$ avec β à coefficients entiers positifs, sauf $\beta_k = -1$, et dans $B_k^-(\alpha)$, il sont du type $b_j(\gamma+\alpha)$ avec

γ à coefficients entiers négatifs. Comme $\beta_j > 0$, la condition précédente n'est vérifiée que lorsque

$$\beta_k = -1; \beta_j = 1; \beta_{k+1} = ... = \beta_{j-1} = 0 = \gamma_l = ... = \gamma_j = 0,$$

pour un $k < l \leq j$. On voit qu'il existe, pour chaque j, un et un seul facteur de ce type dans $B_k^+(\alpha)$ et $B_k^-(\alpha)$, respectivement indexés $i = 2^{j-k-1}$ et $i = 1$. Il suffit donc de comparer les facteurs de

$$\begin{aligned} b_j(\alpha - \mathbb{1}_k + \mathbb{1}_j) &= \prod_{i=1}^{k}\left(\alpha_i + ... + \alpha_j + \frac{d}{2}(j-i)\right) \cdot \\ &\cdot \prod_{i=k+1}^{j}\left(\alpha_i + ... + \alpha_j + 1 + \frac{d}{2}(j-i)\right); \\ b_j(\alpha) &= \prod_{i=1}^{k}\left(\alpha_i + ... + \alpha_j + \frac{d}{2}(j-i)\right) \prod_{i=k+1}^{j}\left(\alpha_i + ... + \alpha_j + \frac{d}{2}(j-i)\right). \end{aligned}$$

Les facteurs communs sont :

$$\prod_{i=1}^{k}\left(\alpha_i + ... + \alpha_j + (j-i)\frac{d}{2}\right).$$

Nous en déduisons que le plus grand commun diviseur de $B_k^+(\alpha)$ et $B_k^-(\alpha)$ est bien :

$$\widetilde{B}_k(\alpha) = \prod_{1 \leq i \leq k \leq j \leq r}\left(\alpha_i + ... + \alpha_j + (j-i)\frac{d}{2}\right). \ \square$$

Ultérieurement, grâce à un résultat de [**?**], on montrera le

Théorème 3.8.2
$\widetilde{B}_k$ est en fait le plus grand commun diviseur de tous les B_k vérifiant l'identité **??**.

Cela va nous permettre de trouver le produit de facteurs gamma "minimal" dont les pôles contiennent ceux des distributions de Riesz.

On peut enfin s'interroger sur la conjecture de l'existence d'un opérateur $\widetilde{P}_k(x,\alpha)$ qui satisferait la formule **??** avec pour polynôme $\widetilde{B}_k$. Nous pouvons montrer qu'elle est satisfaite dans les algèbres de Jordan de rang 2, en combinant les opérateurs D_1 et D_2. Toutefois, rien ne permet d'esperer une généralisation de ce calcul au rang r, du fait que l'anneau $\mathbb{C}[\alpha_1,...,\alpha_r]$ n'est pas principal.

Exemple 3. Les matrices symétriques réelles de rang 2. L'opérateur $\widetilde{P}_k(x,\alpha)$ correspondant à $\widetilde{B}_k$ existe dans cette situation. Voir la remarque **??** du premier chapitre.

Exemple 4. Les matrices symétriques réelles de rang 3. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned}
b_3(\alpha) &= \alpha_3(\alpha_2+\alpha_3+1/2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1). \\
b_2(\alpha) &= \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+1/2). \\
\widetilde{B}_2(\alpha) &= \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+1/2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1) \\
B_2^+(\alpha) &= \widetilde{B}_2(\alpha)(\alpha_3+1)(\alpha_2+\alpha_3+3/2) \\
B_2^-(\alpha) &= \widetilde{B}_2(\alpha)\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3+1/2).
\end{aligned}$$

Ainsi, $B_2^+(\alpha)$ et $B_2^-(\alpha)$ ont des zéros communs qui ne sont pas des zéros de leur plus grand commun diviseur $\widetilde{B}_2(\alpha)$, par exemple $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,-3/2,0)$. En conséquence, $\widetilde{B}_2(\alpha)$ n'est pas dans l'idéal engendré par $B_2^+(\alpha)$, et $B_2^-(\alpha)$. $\square$

Cet exemple signifie, qu'en général, les combinaisons de la famille des D_k ne suffisent pas à construire un opérateur de Bernstein dont le polynôme associé soit $\widetilde{B}_k(\alpha)$. Toutefois, le théorème **??** et les exemples 1 et 2 montrent qu'elle est assez riche, en particulier pour localiser les singularités des fonctions zêta étendues dans la direction $\mathbf{1}_k$, et, nous le verrons, celles des fonctions sphériques d'une famille d'espaces symétriques ordonnés.

3.9 Localisation des singularités des intégrales zêta.

Synthétisons à présent les résultats obtenus à propos des distributions de Riesz (ou intégrales zêta). Reprenons les notations de la section **??** :

Théorème 3.9.1
Soit $h\in\mathcal{S}(V)$. Alors l'intégrale qui définit la fonction suivante,

$$\prod_{1\le i\le j\le r}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i+...+\alpha_j+(i-j)\frac{d}{2}+1)}\Phi_\varepsilon(h;\alpha)$$

se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^r$.

Preuve. Un domaine de convergence absolue de $\Phi_\varepsilon(h;\alpha)$ est donné par $\mathrm{Re}(\alpha_i)>0$ pour tout $i\in\{1,...,r\}$. Mais en vertu du théorème **??**, les pôles de $\Phi_\varepsilon(h;\alpha)$ sont parmi ceux des

$$\prod_{i=1}^{j} \Gamma(\alpha_i + ... + \alpha_j + (i-j)\frac{d}{2} + 1).$$

pour $j = 1,...,r$. Cela prouve le résultat. $\square$

Chapitre 4

Généralités sur les espaces ordonnés.

4.1 Géométrie des espaces symétriques ordonnés.

Le matériel contenu dans ce paragraphe est principalement extrait de [**?**].

Soit $\mathcal{M}$ une variété differentiable de dimension n. Une *structure causale* sur $\mathcal{M}$ est la donnée d'un champ de cônes :

$$\mathcal{M} \ni x \mapsto C_x \subset T_x\mathcal{M}.$$

Le cône C_x est supposé fermé, convexe, pointu et d'intérieur non vide. Désignons par cône *régulier* un cône satisfaisant à l'ensemble de ces propriétés. La dépendance de C_x en x est C^∞ au sens où il existe un cône régulier C de $\mathbb{R}^n$, un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{M}$ et des applications C^∞ $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to T\mathcal{M}$ avec $\varphi_i(x,t) \in T_x\mathcal{M}$, φ_i linéaire en t, inversible, et $\varphi_i(x,C) = C_x$.

Un application $f \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$, où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux variétés causales, est une *application causale* si et seulement si

$$D_x f(C_x) \subset C'_{f(x)},$$

où C (resp. C') est la champ de cône de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$). Une courbe γ, C^1 de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathcal{M}$, est dite causale si pour tout t sa dérivée $\dot{\gamma}\ (t)$ appartient au cône $C_{\gamma(t)}$. Cela revient à dire que γ est causale pour la structure de variété causale de $[\alpha,\beta]$, donnée par le cône $\mathbb{R}^+$ dans chacun des plans tangents, identifiés à $\mathbb{R}$.

Une structure causale est dite *globale* s'il n'y a pas de courbe fermée causale non triviale. Dans ce cas, on définit un ordre partiel sur $\mathcal{M}$ par $x \preccurlyeq y$ s'il existe une courbe causale reliant x à y. L'ensemble des points entre x et y pour cet ordre partiel est l'intervalle $D(x,y)$ d'extrémités x et y. On dit que la structure causale est *globalement hyperbolique* si ces intervalles sont compacts. En général, ils ne sont pas fermés.

Si un groupe de Lie G agit par ℓ sur $\mathcal{M}$, on dit que la structure causale est *G-invariante* quand $\ell_g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est causale pour tout $g \in G$. En outre, lorsque la variété G/H est homogène sous l'action causale de G, la structure causale est entièrement déterminée par le cône $C_{\mathbf{o}} \subset T_{\mathbf{o}}G/H$ à l'origine $\mathbf{o} = 1H$. Ce cône est invariant sous l'action dérivée de H sur $T_{\mathbf{o}}G/H$. Réciproquement, la donnée d'un cône régulier H-invariant dans $T_{\mathbf{o}}G/H$ définit une structure causale sur G/H, qui rend l'action de G causale, par la donnée de :

$$C_{g\mathbf{o}} := D_{\mathbf{o}}\ell_g(C_{\mathbf{o}}).$$

Si G/H est munie d'une structure causale invariante globale, on définit le semi-groupe suivant :

$$S = \{g \in G : g\mathbf{o} \succcurlyeq \mathbf{o}\}.$$

Intéressons nous à présent aux espaces symétriques causaux.

Soit (G,H) une paire symétrique (G un groupe de Lie connexe, H un sous groupe fermé de G et ouvert du sous-groupe des points fixes par une involution η). Les algèbres de Lie de G et H sont $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ et la dérivée de η est encore notée η. $\mathfrak{q}$ désigne l'espace des points anti-fixes de η dans $\mathfrak{g}$. Ainsi, $\mathfrak{q}$ s'identifie naturellement à $T_{\mathbf{o}}G/H$, et via cette identification, $D_{\mathbf{o}}\ell_h$ correspond à l'action adjointe $Ad(h)$ de H sur $\mathfrak{q}$. Une structure causale sur G/H est, comme on l'a vu, la donnée d'un cône régulier $Ad(H)$-invariant dans $\mathfrak{q}$.

Supposons G semi-simple, à centre fini. On se donne une involution de Cartan θ de G qui commute à η. On note K le sous-groupe compact maximal de G, qui est l'ensemble des points fixes de θ. Les points fixes (resp. anti-fixes) de la dérivée de θ, encore notée θ, sont $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$).

Supposons enfin $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *irréductible* : $\mathfrak{g}$ est sans idéal propre τ stable. On a alors :

Théorème 4.1.1
Il existe un cône régulier C, $Ad(H)$-invariant dans $\mathfrak{q}$, si et seulement si $\mathfrak{q}_0 = \{X \in \mathfrak{q} : Ad(H \cap K)X = X\} \neq \{0\}$. Dans cette situation, $C \cap \mathfrak{q}_0 \neq \{0\}$. Nous sommes alors dans l'un des trois cas suivants :

– $\dim \mathfrak{q}_0 = 1$ *et* $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$.

– $\dim \mathfrak{q}_0 = 1$ *et* $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.
– $\dim \mathfrak{q}_0 = 2$ *et* $\dim(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}_0) = 1$, $\dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}_0) = 1$.

Les structures causales dans le premier cas ne sont jamais globales. Nous ne nous intéresserons pas à cette situation. Les structures causales de la deuxième situation sont globales et globalement hyperboliques. Dans la troisième situation, il y a quatre structures causales, deux sont non-globales, et deux globales et globalement hyperboliques.

Définition 4.1.1
On dit qu'un espace symétrique causal est ordonné, s'il est muni d'une structure causale globale et globalement hyperbolique, c'est-à-dire dans chacune des deux dernières situations du théorème précédent.

Théorème 4.1.2
Soit G/H un espace symétrique ordonné. On note S le semi-groupe de l'ordre partiel associé. Alors
$$S = \exp(C_{\mathbf{o}})H.$$

Notons enfin l'importance du théorème suivant dans l'étude de la convergence des fonctions sphériques :

Théorème 4.1.3
On a $\overline{N} \cap NAH = \exp(D)\overline{N}_0$ où D est un ouvert connexe borné symétrique de $\overline{\mathfrak{n}}_1$. Cette ouvert est difféomorphe à l'espace riemannien symétrique $H/H \cap K$. Plus précisement, si $P_{\max}$ est le sous-groupe parabolique maximal $P_{\max} = NA(H \cap K)$,
$$\exp(D)P_{\max} = HP_{\max}.$$
De plus,
$$(S^o)^{-1} = \{g \in G : g\overline{D} \subset D\}.$$

4.2 Eléments de classification.

Dans ce paragraphe, nous donnons les deux résultats qui mènent à la classification des espaces ordonnés dans un premier temps, et à la classification des structures causales sur un espace donné, ensuite.

Le théorème 4.2 de [?] donne le principe de classification des espaces ordonnés :

Théorème 4.2.1
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple réelle. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne

de $\mathfrak{p}$, et Δ le système de racines restreintes qui correspond. Alors les points suivants sont équivalents :

- *Il existe une involution τ qui commute à θ, telle que la paire $(\mathfrak{g},\tau)$ soit causale.*
- *Il existe $Y_0 \in \mathfrak{p} - \{0\}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-1,Ad(Y_0)) \oplus \mathfrak{g}(0,Ad(Y_0)) \oplus \mathfrak{g}(1,Ad(Y_0))$.*
- *Il existe une racine simple α dans Δ réduit ($\alpha \in \Delta \Rightarrow 2\alpha \notin \Delta$) telle que $d(\alpha) = 1$.*

Dans cet énoncé $d(\alpha)$ est le degré de α dans la plus longue racine positive. La liste des algèbres de Lie qui satisfont à ces conditions est donnée dans l'appendice B.

Remarque 4.2.1
Le choix de cette racine dans le système simple détermine complétement la paire causale $(\mathfrak{g},\tau)$. Cette racine est la seule racine non-compacte du système simple Π, et son choix équivaut au choix d'une *signature* au sens d'Oshima-Sekiguchi, qui affecte la valeur -1 à la racine α, et les valeurs $+1$ aux autres racines simples.

L'élément normalisé Y_0 du second point est appelé l'*élément causal*. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan (c'est-à-dire abélien maximal) de $\mathfrak{q}$ contenant Y_0. On note Δ le système de racines restreintes associé, c'est toujours un système réduit ($\alpha \in \Delta \Rightarrow 2\alpha \notin \Delta$). Le groupe de Weyl correspondant est $\mathcal{W}$. On définit encore pour $\epsilon \in \{1,0,-1\}$:

$$\Delta_\epsilon = \{\alpha \in \Delta : \alpha(Y_0) = \epsilon\}.$$

Δ_0 est l'ensemble des *racines compactes*, et $\Delta_1 \cup \Delta_{-1}$ celui des *racines non-compactes*. On peut choisir un système de racines positives Δ^+ de sorte que $\Delta_1 \subset \Delta^+$ et $\Delta_{-1} \cap \Delta^+ = \emptyset$. On définit les groupes N, N_0, N_1, $\overline{N}$, $\overline{N}_0$, $\overline{N}_1$ comme les sous-groupes de G associés respectivement aux systèmes $\Delta^+,\Delta_0 \cap \Delta^+,\Delta_1,\Delta^-,\Delta_0 \cap \Delta^-,\Delta_{-1}$. Le système de racines simple correspondant à Δ est noté $\Pi = \{\alpha_1,...,\alpha_r\}$. Enfin, le groupe de Weyl du système Δ_0 est noté $\mathcal{W}_0$.

Le dernier point précise qu'il existe une unique racine simple $\alpha_0 \in \Pi$, non compacte. Cette racine apparaît avec multiplicité exactement 1 dans l'écriture des racines non-compactes positives dans la base des racines simples. Ainsi, le système de racine simple associé au système réductible Δ_0 est $\Pi - \{\alpha_0\}$.

Complétons les notations. Le produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ est donné par $(\cdot,\cdot) = -B(\theta(\cdot),\cdot)$ où B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Définissons pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ le vecteur $H'_\lambda \in \mathfrak{a}$, tel que $\lambda(H) = (H,H'_\lambda)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$. Posons pour $\lambda \neq 0$,

$$H_\lambda = \frac{2H'_\lambda}{(H'_\lambda,H'_\lambda)}.$$

C'est le covecteur associé à la forme linéaire λ. Il vérifie $\lambda(H_\lambda) = 2$. On munit alors $\mathfrak{a}^*$ du produit scalaire $(\lambda,\mu) = (H'_\lambda,H'_\mu)$.

Donnons à présent le résultat de classification des cônes réguliers H-invariants de $\mathfrak{q}$ qui contiennent Y_0 :

Théorème 4.2.2
Supposons que G/H est un espace ordonné, dont la structure causale provient de $C_\mathbf{o} \subset \mathfrak{q}$. Notons Y_0 l'élément causal contenu dans $C_\mathbf{o}$. Définissons le cône maximal et le cône minimal de $\mathfrak{q}$ par :

$$\begin{aligned} C_{\min} &= \overline{conv(Ad(H_o)\mathbb{R}^+Y_0)}, \\ C_{\max} &= \{X \in \mathfrak{q} : \forall Y \in C_{\min} : B(X,Y) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Alors $C_{\min} \subset C_\mathbf{o} \subset C_{\max}$. L'intersection de $C_\mathbf{o}$ avec $\mathfrak{a}$ défini un cône c, régulier et $\mathcal{W}_0$-invariant. En outre,

$$C_\mathbf{o}^o = Ad(H)(c^o).$$

Réciproquement, tout cône c régulier et $\mathcal{W}_0$-invariant de $\mathfrak{a}$, est l'intersection avec $\mathfrak{a}$, d'un cône régulier H-invariant de $\mathfrak{q}$, qui contient Y_0.

Pour achever ce paragraphe, donnons la description de $c_{\min}$ et $c_{\max}$, les intersection de $C_{\min}$ et $C_{\max}$ avec $\mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned} c_{\min} &= \sum_{\alpha\in\Delta_1} \mathbb{R}^+ H_\alpha \subset \mathfrak{a}, \\ c_{\max} &= c^*_{\min} = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \geq 0, \forall \alpha \in \Delta_1\}. \end{aligned}$$

4.3 Fonctions sphériques sur un espace ordonné.

Dans cette présentation, on s'inspirera principalement de [**?**]. On se donne un espace ordonné semi-simple G/H, comme dans la section **??**. On suppose en outre que l'ordre provient du cône $C_{\max}$. Ainsi, le semi-groupe associé est $S = \exp(C_{\max})H$. Une *fonction sphérique* est une fonction φ définie sur l'interieur S^o de S telle que pour tout $x,y \in S^o$,

$$\int_H \varphi(xhy)dh = \varphi(x)\varphi(y),$$

avec dh une mesure de Haar sur H.

Définissons le noyau de Poisson $a_H(x)$ d'un élément x de NAH par sa composante en A, qui, rappelons le, est uniquement déterminée.

Par H-invariance de S, $h{\cdot}x \in S \subset NAH$, si $h \in H$ et $x \in S$. Considérons une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, sur le sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Sous réserve de convergence, on pose pour $x \in S^o$:

$$\varphi_\lambda(x) = \int_H a_H(hx)^{\rho-\lambda}dh,$$

où ρ désigne toujours la demi-somme des racines restreintes positives, avec multiplicité, et

$$a_H(x)^\mu = \exp\left(\mu(\log a_H(x))\right).$$

Notons

$$\mathcal{E} = \left\{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* : \forall x \in S^o, h \mapsto a_H(hx)^{\rho-\lambda} \in L^1(S^o)\right\}.$$

Signalons enfin la définition de la fonction c_D d'Harish-Chandra associée à l'espace ordonné G/H :

$$c_D(\lambda) = \int_{\exp(D)} a_H(\overline{n})^{\rho+\lambda}d\overline{n}.$$

Notons $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants de G/H. Résumons les propriétés majeures de ces fonctions φ_λ :

Théorème 4.3.1
Les fonctions φ_λ satisfont :

- $\exists \chi_\lambda \in$*Hom*$(\mathbb{D}(G/H),\mathbb{C}) \mid \forall D \in \mathbb{D}(G/H)$, $D\varphi_\lambda = \chi_\lambda(D)\varphi_\lambda$.
- φ_λ *est une fonction sphérique pour Re*$(\lambda) \in \mathcal{E}$.
- $\varphi_\lambda = \varphi_{w.\lambda}$ *pour $w \in \mathcal{W}$ le groupe de weyl de Δ.*
- $\mathcal{E} = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* : c_D(\lambda) < \infty\}$.
- $\lim_{a\to+\infty} a^{\lambda-\rho}\varphi_\lambda(a) = c_0(\lambda)c_D(\lambda)$ *pour Re*$(\lambda) \in \mathfrak{a}_+^* \cap \mathcal{E}$.

Le premier point apparaît par exemple dans le lemme 8.2.4 de [**?**]. Les quatre derniers points sont issus de [**?**], respectivement théorème 5.2, corollaire 5.6, théorème 6.3, et théorème 6.8. Dans le dernier point, la notation $a \to +\infty$ signifie $\log(a) \in \mathfrak{a}_-$ et $\lim a^\alpha = 0$ pour tout racine positive $\alpha \in \Delta^+$.

Les valeurs de λ pour lequelles $c_D(\lambda) < \infty$ ainsi qu'une formule produit de ces fonctions ont été determinés dans [**?**] pour le cas des espaces satellites, puis dans [**?**], théorème III.5, en toute généralité :

Théorème 4.3.2
L'ensemble des λ, pour lequels l'intégrale définissant c_D converge, est donné par :

$$\mathcal{E} = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* : \forall \alpha \in \Delta_1,\ Re(\lambda(H_\alpha)) < 2 - m_\alpha\}$$

où m_α est la multiplicité de la racine α. Pour $\lambda \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$c_D(\lambda) = \kappa \prod_{\alpha \in \Delta_1} B\left(\frac{m_\alpha}{2}, -\frac{1}{2}\lambda(H_\alpha) - \frac{m_\alpha}{2} + 1\right),$$

avec B représentant la fonction Beta d'Euler et κ une constante positive qui ne dépend que de la paire $(\mathfrak{g},\eta)$.

4.4 Conjecture d'Ólafsson - Pasquale.

Un problème intéressant, et résolu dans [**?**] par une méthode inexplicite utilisant la théorie d'Heckman et Opdam, est la réalisation du prolongement méromorphe en λ des fonctions sphériques φ_λ, en déterminant leurs pôles, ou au moins, un ensemble assez petit qui les contient. La solution à ce problème obtenue dans cette référence fait l'objet du corollaire 8.2 :

Théorème 4.4.1
Pour tout $a \in S^o \cap A$, la fonction $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(a)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, avec des pôles simples situés dans l'ensemble des pôles du numérateur de la fonction c_D.

Dans ce même article, G. Ólafsson et A. Pasquale suggèrent une autre stratégie, explicite. L'idée est la suivante : sous réserve de convergence, ces auteurs obtiennent (formule (9) p 359) pour $a \in S^o \cap A$:

$$\varphi_\lambda(a) = \int_{\exp(D)} \left[\int_{K(0)} a_H(\omega k a)^{\rho-\lambda} dk\right] a_H(\omega)^{\lambda+\rho} d\omega, \tag{4.1}$$

où l'intégrale entre crochets est une fonction à support "loin des singularités ", et $K(0)$ désigne $K \cap H$. Notons que les exposants sont inversés par rapport à la référence citée, et que l'ordre des arguments des fonctions l'est aussi. Cette convention permet de rester cohérent avec les notations de [**?**], et revient à définir les objets par rapport à NAH plutôt que HAN. Elle paraît plus adapté à l'étude qui va suivre.

A l'aide d'une base orthonormée de $\mathfrak{n}_{-1}$, les auteurs obtiennent un paramétrage de D en la variable vectorielle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$ ($s := \dim \mathfrak{n}_{-1}$), de sorte que

$$a_H(\omega_{\mathbf{t}})^{\lambda+\rho} = \prod_{j=1}^{r} p_j(\mathbf{t})^{z_j(\lambda+\rho)},$$

avec

$$z_j(\lambda+\rho) = \frac{1}{4}\,(\lambda+\rho)\,(H_\alpha),$$

et p_j des polynômes strictement positifs sur D que l'on va définir. Notons μ_i le poids fondamental associé à la racine simple α_i, c'est-à-dire :

$$(\mu_i,\alpha_j) = \delta_{ij}(\alpha_j,\alpha_j)\ \forall i,j \in \{1,...,r\}.$$

Notons ensuite que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ sont conjugués pour les espaces ordonnés, de sorte que toute représentation K-sphérique est également H-sphérique. Pour $j = 1,...,r$, soit π_j la représentation de plus haut poid μ_j. On munit l'espace de la représentation d'un produit scalaire tel que $\pi_j(.)^* = \pi_j(\theta(.)^{-1})$. Soient v_j et u_j respectivement le vecteur de plus haut poids et un vecteur H-fixe tel que $(v_j,u_j) = 1$. Fixons une base orthonormée $\{Y_i\}_{i=1,\dots,s}$ de $\mathfrak{n}_{-1}$. Identifions $\mathbb{R}^s$ à N_{-1} via :

$$\overline{n} : \mathbb{R}^s \to N_{-1},\ \mathbf{t} \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{s} t_k Y_k\right).$$

Une fonction f sur N_{-1} est dite polynômiale lorsque $f(\overline{n}_{\mathbf{t}})$ est polynômiale. Comme N_{-1} est nilpotent, les coefficients matriciels de π_j sont polynômiaux sur N_{-1}. On définit alors :

$$p_j(\mathbf{t}) = |(\pi_j(\overline{n}_{\mathbf{t}})^{-1}v_j,u_j)|^2, \quad \forall j \in \{1,...,r\}.$$

Ici encore, l'apparition de l'exposant -1 est une conséquence de notre convention. Décomposons $\overline{n}_{\mathbf{t}} = n(\overline{n}_{\mathbf{t}})a_H(\overline{n}_{\mathbf{t}})h(\overline{n}_{\mathbf{t}})$. Alors,

$$\begin{aligned} p_j(\mathbf{t}) &= |\pi_j^*(h(\overline{n}_{\mathbf{t}})^{-1})\pi_j(a_H(\overline{n}_{\mathbf{t}})^{-1})\pi_j(n(\overline{n}_{\mathbf{t}})^{-1})v_j,u_j)|^2 \\ &= |(\pi_j(a_H(\overline{n}_{\mathbf{t}})^{-1})v_j,\pi_j(\theta(h(\overline{n}_{\mathbf{t}})))u_j)|^2 \\ &= a_H(\overline{n}_{\mathbf{t}})^{-\mu_j}. \end{aligned}$$

Supposons que l'on dispose d'identités de type Bernstein :

$$Q(\lambda - \rho,\mathbf{t},\partial)a_H(\omega_{\mathbf{t}})^{\lambda+\rho} = b(\lambda)a_H(\omega_{\mathbf{t}})^{\lambda+\rho-\delta}, \tag{4.2}$$

avec b un polynôme en λ et un opérateur différentiel polynômial en ses trois variables, et δ un décalage adapté de l'exposant, la formule **??** nous permettrait de prolonger méromorphiquement φ_λ et d'en localiser les pôles, en appliquant la stratégie présentée dans la section **??**. Les auteurs formulent alors la conjecture suivante, page 375 :

Conjecture 4.4.1
La formule **??** est vraie pour ce décalage δ et ce polynôme b :

$$\begin{aligned} \delta \quad &: \quad (\delta,\alpha_j) = 2(\alpha_j,\alpha_j), \quad \forall \alpha_j \in \Pi. \\ b(\lambda) \quad &= \quad \prod_{\alpha\in\Delta_1} \left(\frac{1}{2}\lambda(H_\alpha) + \frac{m_\alpha}{2} - \frac{1}{2}\delta(H_\alpha) + 1\right) ... \left(\frac{1}{2}\lambda(H_\alpha) + \frac{m_\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que le choix du décalage δ n'est pas optimal pour l'étude du prolongement des φ_λ : du fait de la forme du domaine de convergence des φ_λ,

$$\mathcal{E} = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* : \forall \alpha \in \Delta_1,\, \mathrm{Re}(\lambda(H_\alpha)) < 2 - m_\alpha\},$$

le décalage $\delta = \mu_i$, avec α_i la racine simple non-compacte, suffit à obtenir le prolongement méromorphe sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$(\delta,\alpha_j) = 2\delta_{ij}(\alpha_j,\alpha_j), \quad \forall \alpha_j \in \Pi.$$

D'autre part, remarquons :

Proposition 4.4.2
Soient $f_1,...,f_h$ des polynômes de $\mathbb{C}[z_1,...,z_r]$. Supposons que pour $\alpha_1,...,\alpha_h \in \mathbb{C}$ on ait :

$$b(\alpha_1,...,\alpha_h)f_1^{\alpha_1-k_1}...f_h^{\alpha_h-k_h} = Q(\alpha_1,...,\alpha_h,z,\partial)f_1^{\alpha_1}...f_h^{\alpha_h},$$

avec b un polynôme produit de facteurs de degré 1, Q polynômial en toutes ses variables, et $k_1,...,k_h$ des entiers positifs ou nuls. Supposons $k_1 > 0$ et qu'il existe $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^r$ tel que $f_1(\mathbf{z}) = 0$ alors que $f_2(\mathbf{z})...f_h(\mathbf{z}) \neq 0$. Alors α_1 divise b.

Preuve. Si α_1 divise $Q(\alpha_1,...,\alpha_h,z,\partial)$, le résultat est alors évident. Supposons donc que α_1 ne divise pas $Q(\alpha_1,...,\alpha_h,z,\partial)$. Pour tout $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \geq k_i$ avec $i = 2,...,h$, nous avons en $\alpha_1 = 0$:

$$b(0,\alpha_2,...,\alpha_r)f_1^{-k_1}f_2^{\alpha_2-k_2}...f_h^{\alpha_h-k_h} = Q(0,\alpha_2,...,\alpha_h,z,\partial)f_2^{\alpha_2}...f_h^{\alpha_h}$$

le membre de droite est borné au voisinage du point $\mathbf{z}$ de l'énoncé, alors que le membre de gauche ne l'est pas au voisinage du même point, sauf si $b(0,\alpha_2,...,\alpha_r) = 0$. Cette identité est vraie pour α_i entier, $\alpha_i \geq k_i$ et $i = 2,...,h$. Mais il existe $r-1$ entiers vérifiant ces inégalités et n'appartenant pas à la famille finie d'hyperplans affines, dont les équations sont données par les facteurs de degré 1 de b, évalués en $\alpha_1 = 0$. Or l'un de ces facteurs au moins est nul, de sorte que α_1 divise b. □

Cette proposition, combinée au lemme suivant, que nous prouverons dans la section **??** grâce à des exemples parmi les cônes satellites, infirme la conjecture :

Lemme 4.4.3
Il existe un des espaces ordonnés G/H qui satisfont la propriété suivante. Il existe $j \in \{1,...,r\}$, et il existe $z \in \overline{\mathfrak{n}}_{-1}$ tels que α_j soit une racine compacte, $p_i(z) \neq 0$ si $i \neq j$ et $p_j(z) = 0$.

Corollaire 4.4.4
*La conjecture **??** doit être rectifiée.*

Preuve. Notons α_i une racine compacte qui satisfait la conclusion du lemme **??**. Appliquons la proposition précédente à $p_1,...,p_r$. On trouve que :

$$2z_i(\lambda+\rho) = \frac{1}{2}(\lambda+\rho)(H_{\alpha_i}) = \frac{1}{2}\lambda(H_{\alpha_i}) + \frac{m_{\alpha_i}}{2} \text{ divise } b(\lambda),$$

mais les facteurs de la conjecture ne font intervenir que les racines non-compactes. Contradiction. □

Reformulons une version faible de cette conjecture, avec un décalage dans la seule direction de la racine simple non compacte α_i :

Conjecture 4.4.2
La formule **??** est vraie pour ce décalage δ et ce polynôme b :

$$\begin{aligned} \delta &: \quad (\delta,\alpha_j) = 2\delta_{ij}(\alpha_j,\alpha_j), \quad \forall \alpha_j \in \Pi. \\ b(\lambda) &= \prod_{\alpha\in\Delta_1}\left(\frac{1}{2}\lambda(H_\alpha)+\frac{m_\alpha}{2}-\frac{1}{2}\delta(H_\alpha)+1\right)...\left(\frac{1}{2}\lambda(H_\alpha)+\frac{m_\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Notons que les deux conjectures coïncident en rang 1. La première a d'ailleurs été prouvée dans [**?**] le cadre du rang 1. Nous nous proposons de prouver un substitut faible de la seconde, dans le contexte des espaces satellites, qui permet toutefois de déterminer les pôles des fonctions sphériques :

Conjecture 4.4.3
Les polynômes b qui satisfont la formule **??** avec le paramètre δ suivant,

$$\delta : (\delta,\alpha_j) = 2\delta_{ij}(\alpha_j,\alpha_j), \quad \forall \alpha_j \in \Pi.$$

ont pour plus grand commun diviseur :

$$b'(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta_1} \left(\frac{1}{2}\lambda(H_\alpha) + \frac{m_\alpha}{2} - \frac{1}{2}\delta(H_\alpha) + 1\right) ... \left(\frac{1}{2}\lambda(H_\alpha) + \frac{m_\alpha}{2}\right).$$

Chapitre 5

Géométrie des cônes satellites.

5.1 Mutation d'algèbres euclidiennes.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la géométrie d'une catégorie de cônes non-convexes, les cônes satellites. La réalisation du plan tangent au point base d'un satellite fait intervenir une algèbre de Jordan, de manière analogue au cas des cônes symétriques. L'introduction des mutations d'algèbres euclidiennes est par conséquent motivée par le rôle qu'elles jouent dans cette réalisation. La plupart des résultats de ce paragraphe se trouvent dans [**?**]. Certaines définitions peuvent être données dans un contexte plus général, nous les restreignons pour plus de simplicité au cadre de notre étude.

Soit W une algèbre de Jordan. Sa représentation régulière est notée L, et sa représentation quadratique est P. On suppose que W possède un élément neutre e. On munit W de la forme bilinéaire associative :

$$\tau(a,b) = \frac{r}{n}\mathrm{Tr}(L(a)L(b))$$

Notons $\star$ le produit de W. Soit u un élément de W. Une *mutation* de l'algèbre de Jordan $(W,\star)$ est l'algèbre $(W_u,\star_u)$, d'espace vectoriel sous-jacent W et muni du produit :

$$a \star_u b = a \star (u \star b) + b \star (u \star a) - u \star (a \star b),\ \forall a,b \in W.$$

W_u est une algèbre de Jordan, de représentation régulière L_u et d'application quadratique P_u, munie de la forme bilinéaire τ_u, définie de la même façon que τ. Voici les propriétés principales de $(W_u,\star_u)$:

Proposition 5.1.1
Les objets suivants de l'algèbre de Jordan $(W_u,\star_u)$ vérifient pour tout $a \in W_u$:

$$\begin{aligned} L_u(a) &= L(au) + [L(a),L(u)], \\ P_u(a) &= P(a)P(u), \\ \tau_u(a,b) &= \tau(P(u)a,b). \end{aligned}$$

Supposons à présent u inversible dans W.

Proposition 5.1.2
Si $u \in W^\times$, $(W_u,\star_u)$ possède un élément neutre, u^{-1} (inverse dans W). Par ailleurs, τ_u est dégénérée si et seulement si τ l'est. W est donc semi-simples (resp. simple) si et seulement si W_u l'est. Notons enfin que le groupe de structure de W est le groupe de structure de W_u, et que les inversibles de W et de W_u coïncident. Pour finir, si W est semi-simple, W et W_u sont deux formes réelles de $W^{\mathbb{C}}$.

Notons également la propriété de "mutation inverse" :

Proposition 5.1.3
On a $W = (W_u)_{u^{-2}}$, où l'inverse est prise dans $(W,\star)$.

Intéressons nous maintenant au cas où

$$u = e_{pq} := \sum_{k=1}^{p} c_k - \sum_{k=p+1}^{r} c_k$$

est un élément involutif ($e_{pq}^2 = e_{pq}$) d'une algèbre de Jordan euclidienne notée désormais V. Remarquons

$$L(c_i) = \left\{ \begin{array}{l} +L_{e_{pq}}(c_i) \text{ si } i \in \{1,...,p\} \\ -L_{e_{pq}}(c_i) \text{ si } i \in \{p+1,...,r\} \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\{c_i\}_{i=1}^{p} \cup \{-c_i\}_{i=p+1}^{r}$ est un repère de Jordan pour $V_{e_{pq}}$. Les relations de multiplication des termes de la somme suivante pour le produit $\star_u$ sont les mêmes que pour le produit de V :

$$V = \bigoplus_{1 \le i \le j \le r} V_{ij} \ .$$

De plus, cette somme est orthogonale pour $\tau_{e_{pq}}$. En effet, si $x \in V_{ij}$ et $y \in V_{kl}$, $i \neq k$, $i \neq l$, et enfin si $\lambda = 1$ pour $i = j$ et $1/2$ sinon, on a :

$$\tau_{e_{pq}}(x,y) = \frac{1}{\lambda}\tau_{e_{pq}}(c_i x,y) = \frac{1}{\lambda}\tau_{e_{pq}}(x,c_i y) = 0.$$

5.2 Les G-orbites ouvertes d'une algèbre de Jordan.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une famille d'espaces symétriques ordonnés, qui se réalisent dans une même algèbre de Jordan euclidienne V. Cette particularité apportera un supplément d'information dans l'étude de leurs géométrie et de leurs analyses harmoniques.

Commençons par la définition de l'objet central de cette étude :

Définition 5.2.1
Soit Ω un cône symétrique dans un espace euclidien V de dimension finie. Notons Δ le déterminant de V muni de la structure d'algèbre de Jordan euclidienne associée à Ω. Les différentes composantes connexes de l'ensemble $V^\times = \{\Delta \neq 0\}$ des inversibles de V sont les cônes satellites de Ω.

Fixons désormais un cône symétrique Ω dans une algèbre de Jordan euclidienne V, et conservons les notations du deuxième chapitre. Introduisons l'invariant qui caractérise les satellites. La proposition suivante généralise IV.3.1 de [?] :

Proposition 5.2.1
La signature *d'un élément x de V est le couple (p,q) tel que x compte p valeurs propres strictement positives et q valeurs propres strictement négatives. La signature est G-invariante, et les G-orbites de V sont les ensembles :*

$$\Omega_{pq} = G \cdot e_{pq} \text{ où } e_{pq} = e_p - e_q^*.$$

Les cônes satellites sont les G-orbites de $V^\times$, ou encore les G-orbites ouvertes de V, c'est-à-dire les cônes Ω_{pq} avec $p+q = r$. Ainsi deux éléments inversibles de V appartiennent au même cône satellite si et seulement s'ils ont même signature. Enfin,

$$\overline{\Omega}_{pq} = \bigcup_{s \leq p; t \leq s} \Omega_{st}.$$

Preuve. D'après le théorème **??** de diagonalisation, tout élément x de V s'écrit :

$$x = k \cdot \sum_{k=1}^{r} a_i c_i,$$

avec $k \in K$ et des réels $a_1 \geq ... \geq a_r$.

Notons $p = \max\{i : a_i > 0\}$ et $q = \min\{i : a_i < 0\}$. Alors,

$$\begin{aligned} x &= kP\left(\sum_{i=1}^{p} \sqrt{a_i} c_i + \sum_{i=p+1}^{r-q} c_i + \sum_{i=r-q+1}^{r} \sqrt{-a_i} c_i\right) e_{pq} \\ &\in KA \cdot e_{pq} \subset G \cdot e_{pq}, \end{aligned}$$

donc $x \in G \cdot e_{pq}$ pour un certain couple (p,q). Or

$$\begin{aligned} P(e_{pq}) &= P(e_p) + P(e_q^*) - 2\{L(e_p)L(e_q^*) + L(e_q^*)L(e_p)\} \\ &= P_{V_p} + P_{V_q^*} - P_{V^{pq}}, \end{aligned}$$

où P_E est la projection orthogonale sur E. Ainsi, $P(e_{pq})$ est un endomorphisme symétrique de (V,τ) de signature :

$$\begin{aligned} (\dim V_p + \dim V_q^*, \dim V^{pq}) &= \left(p + q + (p(p-1) + q(q-1))\,\frac{d}{2}, dpq\right) \\ &= \left(s + (s(s-1) - 2\pi)\,\frac{d}{2}, d\pi\right) \end{aligned}$$

où $\pi = pq$ et $s = p + q$. Enfin, $P(ge_{pq}) = gP(e_{pq})g'$ a même signature que $P(e_{pq})$, pour $g \in GL(V)$.

Ainsi, pour g et h deux éléments du groupe G, les signatures de $x = ge_{pq}$ et de $y = he_{p'q'}$ coïncident, si et seulement si celles de $P(e_{pq})$ et $P(e_{p'q'})$ coïncident, ce qui équivaut à $pq = p'q'$ et $p + q = p' + q'$, ou encore $p = p'$ et $q = q'$. Celà signifie $e_{pq} = e_{p'q'}$, c'est-à-dire x et y sont dans la même G-orbite.

La signature est donc G-invariante, et caractérise les G-orbites. Les autres affirmations de la proposition sont des conséquences immédiates de ce fait. $\square$

Remarquons que les deux seuls cônes satellites convexes de V sont $\Omega = \Omega_{r0}$ lui-même et son opposé $\Omega_{0r} = -\Omega$.

Intéressons nous à présent à la structure d'espace symétrique des cônes satellites. Fixons une signature (p,q) avec $p + q = r$. Notons η l'involution de G définie par

$$\eta_{pq}(g) = P(e_{pq})\theta(g)P(e_{pq}) = P(e_{pq})g'^{-1}P(e_{pq}).$$

Cette involution coïncide avec l'involution de Cartan θ lorsque $(p,q) \in \{(r,0),(0,r)\}$. Comme $p+q=r$, $P(e_{pq})$ est involutif, ce qui entraine facilement que η_{pq} et θ commutent. Notons $\mathfrak{h}_{pq}$ (resp. $\mathfrak{q}_{pq}$) le sous-espace propre pour η_{pq} de $\mathfrak{g}$, associé à la valeur propre 1 (resp. -1). Soit H_{pq} le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{pq}$, et $(V_{e_{pq}},\star_{pq})$ la mutation de l'algèbre de Jordan euclidienne V relativement à e_{pq}. La proposition suivante est alors une partie des résultats de la section VIII.2 de [**?**] :

Proposition 5.2.2
L'algèbre de Lie de H_{pq} est l'algèbre des dérivations de $V_{e_{pq}}$:

$$\mathfrak{h}_{pq} = Der(V_{e_{pq}}) = \{X \in \mathfrak{g} : XP(e_{pq}) + P(e_{pq})X' = 0\}.$$

En conséquence, H_{pq} est la composante connexe du groupe des automorphismes de $(V_{e_{pq}},\star_{pq})$, $Aut(V_{e_{pq}})$. Ensuite, H_{pq} est le stabilisateur de e_{pq} dans G, et enfin, H_{pq} est contenu dans $O(\tau_{pq})$ le groupe des isométries de $\tau_{pq} = tr(P(e_{pq}).,.)$.

Par ailleurs, pour x dans $V_{e_{pq}}$, en considérant que exp est la fonction exponentielle associée au produit $\star_{pq}$, $P_{e_{pq}}(\exp x)$ est symétrique par rapport à τ_{pq}, de sorte que $\eta_{pq}(P(\exp tx)) = -P_{e_{pq}}(\exp tx)$ pour tout réel t. En dérivant cette relation, puis en évaluant en $t=0$, il vient : $-L_{e_{pq}}(x) = \eta_{pq}(L_{e_{pq}}(x))$. Nous avons montré :

$$\mathfrak{q}_{pq} = L_{e_{pq}}(V).$$

Nous obtenons ainsi la réalisation du cône satellite Ω_{pq} en termes d'objets de $V_{e_{pq}}$:

Proposition 5.2.3
Le cône satellite Ω_{pq} s'identifie à l'espace symétrique G/H_{pq}, et se réalise dans $V_{e_{pq}}$ comme :

$$\Omega_{pq} = G.e_{pq} = P_{e_{pq}}(V^\times)e_{pq} = \{x \star_{pq} x : x \in V^\times\}.$$

L'espace $V_{e_{pq}}$ s'identifie au plan tangent au point base e_{pq}, $V_{e_{pq}} \approx T_{e_{pq}}\Omega_{pq} \approx \mathfrak{q}_{pq}$, via :

$$L_{e_{pq}} : V \to \mathfrak{q}_{pq},\ x \mapsto L_{e_{pq}}(x).$$

Preuve. Par connexité de G, le groupe $\exp(\mathfrak{q}_{pq})H_{pq}$ égale G. En conséquence, on trouve la réalisation de Ω_{pq} d'une part et de son plan tangent au point base de l'autre. $\square$

5.3 L'ordre vectoriel.

L'algèbre de Jordan V, est naturellement munie d'une structure d'ordre partiel, héritée du cône convexe Ω :

$$\forall x,y \in V,\ x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x - y \in \overline{\Omega}.$$

L'*avenir* d'un élément x de V est donné par

$$\begin{aligned}[x,+\infty[\quad : &= \{y \in V : y \succcurlyeq x\} = x + \overline{\Omega} \\ &= \{y \in V : \Delta_i(y-x) \geq 0, i = 1,...,r\},\end{aligned}$$

en utilisant la caractérisation **??**. De même, le *passé* de x est $]-\infty,x] = \{y \in V : x \succcurlyeq y\}$. Pour tout x,y dans V, l'*intervalle* fermé d'extrémités x puis y est donné par :

$$[x,y] := [x,+\infty[\cap]-\infty,y] = (x+\overline{\Omega}) \cap (y - \overline{\Omega}).$$

C'est un compact de V, dont le volume pour la mesure euclidienne est calculé en terme de fonctions Beta par Gindikin (voir [**?**], page 141) : pour y dans l'avenir de x,

$$V_{dx}([x,y]) = B_{\Omega}\left(\frac{n}{r},\frac{n}{r}\right)\Delta(y-x)^{\frac{n}{r}}.$$

Définissons enfin la relation stricte $x \succ y$, plus exigente que $x \succcurlyeq y$ et $x \neq y$, définie par

$$\forall x,y \in V,\ x \succ y \Leftrightarrow x - y \in \Omega.$$

Nous obtenons une notion naturelle d'intervalle ouvert et semi ouvert. Par exemple,

$$[a,b[= \{x \in V : b \succ x \succcurlyeq a\}.$$

L'avantage de cette relation sur la relation stricte classique est que les intervalles ouverts sont des ouverts.

Nous en déduisons une notion de fonction *croissante,* et fonction *strictement croissante*, de $(V, \succcurlyeq)$ dans un espace ordonné. En voici quelques exemples :

Exemple 1. Pour $g \in G$, la fonction $\ell_g : (V, \succcurlyeq) \to (V, \succcurlyeq)$, $x \mapsto gx$ est strictement croissante. C'est une conséquence immédiate du fait que Ω est G-invariant. On dit que $(V, \succcurlyeq)$ est un ordre G-invariant. □

Exemple 2. Le déterminant $\Delta : (\overline{\Omega}, \succcurlyeq) \to (\mathbb{R}, \geq)$ est croissant. En effet, considérons deux élément de $\overline{\Omega}$, x et y, tels que $x \succcurlyeq y$. Par G-invariance, on peut supposer $y = e$ (le cas où $y = ge_p$, $p < r$, étant trivial, car $\Delta(y) = 0$). Or la décomposition de Cartan de $x = k \cdot \sum_{i=0}^{r} \lambda_i c_i$ ($k \in K$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$) donne :

$$x - e = k \cdot \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - 1) c_i \in \overline{\Omega},$$

donc $\lambda_i \geq 1$ pour tout i, et par conséquent $\Delta(x) \geq 1 = \Delta(e)$. Celà prouve la croissance de Δ. $\square$

Exemple 3. La projection $P(e_p) : (V, \succcurlyeq) \to (V_p, \succcurlyeq)$ est strictement croissante. Par linéarité, celà équivaut à

$$x \in \Omega \Rightarrow P(e_p) x \in \Omega_p.$$

Et d'après la caractérisation **??** de $\Omega_k = \{x : \Delta_i(x) > 0, i = 1, ..., k\}$ et le fait que $\Delta_i(x) = \Delta_i(P(e_p)x)$ pour $i \leq p$, c'est vrai. $\square$

L'ordre $\succcurlyeq$ induit une structure d'ordre sur chacun des Ω_{pq}. Nous avons alors une notion d'avenir restreint à Ω_{pq}. L'ensemble suivant désigne ainsi l'avenir de $x \in \Omega_{pq}$ dans le satellite Ω_{pq} :

$$[x, \infty[_{pq} = \{y \in \Omega_{pq} : y \succcurlyeq x\} = (x + \overline{\Omega}) \cap \Omega_{pq}.$$

Notons S_{pq} le semi-groupe de G associé à $\succcurlyeq$, défini par :

$$S_{pq} = \{g \in G : ge_{pq} \succcurlyeq e_{pq}\}.$$

Nous allons expliciter la forme d'intervalles importants :

Lemme 5.3.1
Supposons que c est un idempotent et que x est un élément de V. Si la projection $P(c)x$ est inversible de signature (p', q'), x est de signature (p, q) avec $p \geq p'$ et $q \geq q'$.

Preuve. D'après la proposition **??**, il existe un unique $z \in V(c, 1/2)$ et $y \in V(c, 0)$ vérifiant l'identité :

$$\Upsilon_{c,z}(P(c)x + y) = x.$$

mais $\Upsilon_{c,z} \in G$, donc $P(c)x + y$ a la même signature que x. D'après le théorème de diagonalisation, $P(c)x$ est diagonalisable dans $V(c, 1)$ et y dans $V(c, 0)$, et les valeurs propres de x sont donc celles de $P(c)x$ et celles de y. Cela prouve le lemme. $\square$

Proposition 5.3.2
L'avenir de e_{pq} dans Ω_{pq} est inclu dans la NA-orbite du point base e_{pq}. En conséquence, $S_{pq} \subset NAH_{pq}$. Enfin, l'avenir de e_{pq} est H_{pq}-invariant, et ainsi, S_{pq} est bi-H-invariant.

Preuve. Soit $x \in \overline{\Omega}$. Comme la projection $P(e_p) : (V, \succcurlyeq) \to (V_p, \succcurlyeq)$ est croissante,

$$P(e_p)(e_{pq} + x) \succcurlyeq e_p,$$

et en particulier, $P(e_p)(e_{pq}+x) \in \Omega_p$. Alors, d'après le lemme **??**, e_p+x a au moins p valeurs propres strictement positives. Or $e_{pq}+x$ est de signature (p,q) et possède donc q valeurs propres négatives. Toujours d'après la proposition **??**, il existe un unique $z \in V^{pq}$ et $y \in V_q^*$ tels que :

$$\Upsilon_{e_p,z}(P(e_p)\{x + e_{pq}\} + y) = e_{pq} + x.$$

Donc y a q valeurs propres négatives, et $y \in -\Omega_q^*$. Nous en déduisons $P(e_p)(e_{pq} + x) + y \in N_p A_p N_q^* A_q^* e_{pq}$, puis $e_{pq} + x \in NAe_{pq}$, ce qui prouve la première partie de la proposition. L'assertion sur S_{pq} provient du fait que H_{pq} est le stabilisateur de e_{pq} dans G, et l'invariance par H_{pq} de $[e_{pq},+\infty[$ vient de ce même argument :

$$H_{pq} \cdot [e_{pq}, +\infty[= (H_{pq}e_{pq} + H_{pq}\overline{\Omega}) \cap H_{pq}\Omega_{pq} = (e_{pq} + \overline{\Omega}) \cap \Omega_{pq} = [e_{pq}, +\infty[. \ \square$$

Proposition 5.3.3
L'intervalle de Ω_{pq} d'extrémités x et y dans Ω_{pq} coïncide avec l'intervalle dans V d'extrémités x et y :

$$[x,y]_{pq} = (x + \overline{\Omega}) \cap (y - \overline{\Omega}).$$

En particulier, ces intervalles sont compacts.

Preuve. Par G-invariance, il suffit de voir que $[e_{pq},y]_{pq} = (e_{pq} + \overline{\Omega}) \cap (y - \overline{\Omega})$, pour $y \in [e_{pq}, +\infty[_{pq}$. Soit $z \in (e_{pq} + \overline{\Omega}) \cap (y - \overline{\Omega})$. Invoquons une nouvelle fois la croissance de la projection. Nous trouvons :

$$\begin{array}{rcl} P(e_p)z & \succcurlyeq & e_p \\ -e_q^* & \succcurlyeq & P(e_q^*)z \end{array}$$

La première inégalité prouve que la signature de z compte au moins p valeurs propres strictement positives, et la seconde montre qu'il en a au moins q négatives, en vertu du lemme **??**. La signature de z est donc (p,q). Nous avons ainsi :

$$[e_{pq},y] = (e_{pq} + \overline{\Omega}) \cap (y - \overline{\Omega}) \subset \Omega_{pq} \cap (e_{pq} + \overline{\Omega}) \cap (y - \overline{\Omega}) = [x,y]_{pq}.$$

L'autre inclusion est triviale, ce qui prouve la proposition. $\square$

5.4 Structure d'espace ordonné de Ω_{pq}.

Dans ce paragraphe, nous prouvons que l'ordre partiel de Ω_{pq} provient d'une structure causale, associée au cône

$$\Lambda_{e_{pq}} = L_{e_{pq}}(\overline{\Omega}) \subset \mathfrak{q}_{pq}.$$

Définissons un champ de cônes dans $T\Omega_{pq}$. Nous posons

$$C_{ge_{pq}} = D_{e_{pq}}\ell_g(\overline{\Omega}) \subset T_{ge_{pq}}\Omega_{pq},$$

où ℓ désigne l'action de G sur Ω_{pq} ($\ell_g x = g \cdot x$) et $\overline{\Omega}$ est le cône des carrés de l'algèbre de Jordan euclidienne $(V,.)$, identifiée au plan tangent $T_{e_{pq}}\Omega_{pq}$.

Il faut remarquer que $T_{e_{pq}}\Omega_{pq} \approx V$ s'identifie à $\mathfrak{q}_{pq}$ via $L_{e_{pq}}$, de sorte que le cône de $\mathfrak{q}_{pq}$ correspondant à $C_{e_{pq}}$ est bien $L_{e_{pq}}(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire l'image par la représentation régulière associée à $(V_{e_{pq}},\star_{pq})$ du cône des carrés de l'algèbre euclidienne $(V,.)$.

Proposition 5.4.1
Soit $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \Omega_{pq}$ une courbe C^1. Alors les deux points suivants sont équivalents :

- *La dérivée $\dot{\gamma}\ (t)$ en tout $t \in [a,b]$ appartient au cône $C_{\gamma(t)}$.*
- *Si $a \leq t \leq s \leq b$, on a $\gamma(t) \preccurlyeq \gamma(s)$ pour l'ordre vectoriel.*

Preuve.

- *Le premier point implique le second.*

D'après le premier point, en tout $t \in [a,b]$, il existe un voisinage de t sur lequel $t \leq s$ implique $\gamma(t) \preccurlyeq \gamma(s)$. En effet, quitte à faire agir g, on peut supposer $\gamma(t) = e_{pq}$. Mais alors, pour tout $i \in \{1,...,r\}$,

$$0 \leq \Delta_i(\dot{\gamma}\ (t)) = \lim_{s \to t^+} \Delta_i \left(\frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \right) = \lim_{s \to t^+} \frac{1}{(s-t)^i} \Delta_i \left(\gamma(s) - \gamma(t)\right),$$

ce qui signifie que $\Delta_i\left(\gamma(s) - \gamma(t)\right) \geq 0$ pour tout i, pourvu que s soit proche de t. Ainsi, $\gamma(s) - \gamma(t) \in \overline{\Omega}$, donc $\gamma(s) \preccurlyeq \gamma(t)$. Enfin, par compacité de $\gamma([t,b])$, et transitivité de $\preccurlyeq$, on étend cette propriété à tout $s \in [t,b]$.

- *Le second point implique le premier.*

La formule utilisée dans le point précédent permet de conclure immédiatement, puisque $\Delta_i\left(\gamma(s)-\gamma(t)\right)\geq 0$ dès que $t\leq s$. $\Box$

Ce résultat prouve que l'ordre partiel associé à la structure causale engendrée par le cône $L_{e_{pq}}(\overline{\Omega})\subset\mathfrak{q}_{pq}$, est exactement l'ordre vectoriel. Les principales propriétés des structures causales se retrouvent ainsi très facilement. En particulier :

Corollaire 5.4.2
La structure causale de Ω_{pq} associée au cône $L_{e_{pq}}(\overline{\Omega})\subset\mathfrak{q}_{pq}$ est globale, et globalement hyperbolique. Donc, Ω_{pq} est un espace symétrique ordonné. L'avenir est un ensemble H-invariant, dont l'intérieur est contenu dans $NA\cdot e_{pq}$. Le semi-groupe associé, S_{pq} est contenu dans NAH_{pq}. De plus, $S_{pq}=\exp(\overline{\Omega})H_{pq}$.

Preuve. C'est une conséquence du résultat précédent qui identifie l'ordre de la structure causale à l'ordre vectoriel, ainsi que du théorème **??**, qui établit ces résultats pour l'ordre vectoriel. $\Box$

Nous pouvons établir les autres propriétés de géométrie des espaces ordonnés :

Proposition 5.4.3
$S_{pq}=P(\exp\overline{\Omega})H_{pq}$, où l'exponentielle est prise dans $(V_{e_{pq}},\star_{pq})$. En particulier, on a une autre caractérisation de l'avenir :

$$[e_{pq},+\infty[_{pq}=\exp(\overline{\Omega}).$$

Preuve. C'est un résultat de la décomposition de Cartan $G=\exp(\mathfrak{q}_{pq})H_{pq}$ et de la formule **??**. $\Box$

Remarque 5.4.1
L'espace riemannien ordonné Ω.

La théorie du paragraphe précédent s'applique aux paires symétriques réductives. Dans la situation qui nous intéresse, les paires symétriques sont réductives. En effet $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\oplus\mathbb{R}.id_V$, de sorte, par exemple, que l'ensemble $\mathfrak{q}_{pq}^0$ des points fixes sous l'action adjointe de $H\cap K$ comprenne systématiquement le centre. Toutefois, en nous restreignant à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}^1=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^1$ où $\mathfrak{p}^1=\{L(x):x\in V,\mathrm{tr}x=0\}$, on retrouve,

$$\mathfrak{q}_{pq}^0\cap\{L(x):x\in V,\mathrm{tr}x=0\}=\mathbb{R}.L(e_{pq}).$$

Ainsi, on reconstruit l'élément causal qui assure l'existence de la structure d'espace ordonné. Comme nous allons le constater, les propriétés des espaces ordonnés réductifs sont sensiblement les mêmes que celles des espaces ordonnés semi-simples. Un phénomène nouveau apparaît cependant : les espaces riemanniens Ω et $-\Omega$ deviennent des espaces symétriques ordonnés, au même titre que les autres Ω_{pq}.

Remarque 5.4.2
Lignes de niveau $|\det| = 1$.

Si on note Ω^1_{pq} l'intersection de Ω_{pq} et la surface $|\det x| = 1$, on obtient un espace symétrique ordonné G^1/H_{pq}, où G^1 est le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^1$, et où la structure causale est donnée par

$$C = \overline{\Omega} \cap \{x \in V_{e_{pq}}\ \widetilde{\operatorname{tr}}(x) = 0\} \subset V_{e_{pq}},$$

où la trace est prise dans $V_{e_{pq}}$. Dans le cas riemannien, C est réduit à $\{0\}$: cela illustre l'inexistence d'espace riemannien ordonné semi-simple. Dans les autres cas :

Proposition 5.4.4
Soit C l'intersection de $\overline{\Omega}$ et de l'hyperplan vectoriel défini par la trace de $V_{e_{pq}}$. Cette hyperplan réalise l'espace tangent en e_{pq} à la ligne de niveau $|\det x| = 1$ de Ω_{pq}, que l'on note Ω^1_{pq}. Lorsque Ω_{pq} n'est pas riemannien, $L_{e_{pq}}(C) = -C_{\min}$.

Preuve. D'après le théorème de classification, il suffit de voir que

$$L_{e_{pq}}(C) \cap \mathfrak{a} = L_{e_{pq}}(C \cap R) = -C_{\min} \cap \mathfrak{a} = -c_{\min} = -\sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathbb{R}^+ H_\alpha.$$

Or : $\alpha_{ij} \in \Delta_1 \Leftrightarrow i \leq p \leq j$. Comme $H_{ij} = 2(L(c_j) - L(c_i)) = -2(L_{e_{pq}}(c_j) + L_{e_{pq}}(c_i))$,

$$\begin{aligned} L_{e_{pq}}\left(\sum_{j=1}^r \lambda_i c_i\right) \in -c_{\min} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = \lambda_{p+1} + \ldots + \lambda_r \\ \lambda_i \geq 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{\operatorname{tr}} \sum_{j=1}^r \lambda_i c_i = 0 \\ \sum_{j=1}^r \lambda_i c_i \in \overline{\Omega} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^r \lambda_i c_i \in c. \ \square \end{aligned}$$

Ainsi, la série d'espaces ordonnés donnée par les lignes de niveau $|\det| = 1$ est la suivante :

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{so}(p+1,1)$	$\mathfrak{so}(p,1)$	$\mathfrak{so}(p+1)$
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p+q)$
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{su}(p+q)$
$\mathfrak{su}^*(2p+2q)$	$\mathfrak{sp}(p,q)$	$\mathfrak{sp}(p+q)$
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	$\mathfrak{f}_4$

5.5 Réalisation bornée de $H_{pq}/H_{pq} \cap K$.

Rappelons $V^{pq} = V(e_p,1/2) \cap V(e_q^*,1/2)$. Pour le reste du chapitre, notons pour $j = 1,...,q$:

$$W_j := V(c_{j+p},1/2) \cap V^{pq} = V_{1j+p} \oplus ... \oplus V_{pj+p}.$$

de sorte que $W_j \cdot W_i \subset V_{i+p,j+p}$ si $i \neq j$ et

$$V^{pq} = W_1 \oplus ... \oplus W_q.$$

Dans l'exemple des matrice symétriques réels, W_i est la i-ème colonne du bloc supérieur droit de taille $p \times q$. Définissons ensuite

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_{pq} \quad &: \quad = \{X = \{e_p,z,.\},z \in V^{pq}\}, \\ \overline{\mathfrak{n}}_{pq} \quad &: \quad = \{X = \{e_q^*,z,.\},z \in V^{pq}\}. \end{aligned}$$

Ce sont des sous-algèbres respectives de $\mathfrak{n}$ et $\overline{\mathfrak{n}}$. On note usuellement les groupes analytiques associés à ces algèbres. N_{pq} est engendrée par les $\Upsilon_{ij,z}$ avec $i \leq p < j$ et $\overline{N}_{pq}$ par les $\Upsilon_{ij,z}$ avec $j \leq p < i$. Les applications suivantes sont alors des isomorphismes de groupe

$$\begin{aligned} n_{pq} \quad &: \quad (V^{pq},+) \to (N_{pq},.),\ z \mapsto \exp(2\{e_p,z,.\}) = \Upsilon_{e_p,z}, \\ \overline{n}_{pq} \quad &: \quad (V^{pq},+) \to (N_{pq},.),\ z \mapsto \exp(2\{e_q^*,z,.\}) = \Upsilon_{e_q^*,z}. \end{aligned}$$

On note ϕ_p (resp. ϕ_q^*) la représentation de Dorfmeister (proposition **??**) de V_p sur $End(V^{pq})$ (resp. V_q^* sur $End(V^{pq})$). L'application quadratique associée est Q_p (resp. Q_q^*). Notons quelques spécificités de cette représentation :

Lemme 5.5.1
Notons $z_1 + ... + z_q = z$, avec $z_i \in W_i$. Nous avons :

$$Q_p(z) = Q_p(z_1) + ... + Q_p(z_q).$$

En outre,

$$\Delta_i(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}) = \begin{cases} \Delta_i(e - Q(z)) \text{ si } i \leq p \\ (-1)^{i+p}\Delta_p(e_p - Q_p(z_{i-p+1} + ... + z_q)) \text{ si } i > p \end{cases}$$

Preuve. Les règles de multiplication des V_{ij}, combinées à la formule **??**, $Q(\xi) = 2e_p\xi^2$, nous donne :

$$Q(z) = Q(z_1) + ... + Q(z_q).$$

Ensuite, la formule **??** qui décrit l'action de l'opérateur de Frobenius $\overline{n}_{pq}(z) = \Upsilon_{e_q^*,z}$ montre que :

$$\overline{n}_{pq}(z)(x_p - e_q^*) = x_p - Q(z) - z - e_q^*,$$

pour tout $z \in V^{pq}$ et $x_p \in V_p$. Ainsi, si $i \leq p$,

$$\begin{aligned} \Delta_i(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}) &= \Delta_i(e_{pq} - Q(z) - z) \\ &= \Delta_i(e - Q(z)). \end{aligned}$$

et si $i \in \{1,...,q\}$, en vertu de la formule **??**,

$$\begin{aligned} \Delta_{i+p}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}) &= \Delta_{i+p}(e_{pq} - Q_p(z) - z) \\ &= \Delta_{i+p}(e_{pq} - Q_p(z) - z_1 - ... - z_i) \\ &= \Delta_{i+p}(\overline{n}_{pq}(z_1 + ... + z_i)\{e_{pq} - Q_p(z_{i+1} + ... + z_q)\}) \\ &= \Delta_{i+p}(e_{pq} - Q_p(z_{i+1} + ... + z_q)) \\ &= (-1)^i\Delta_p(e_p - Q_p(z_{i+1} + ... + z_q)). \ \square \end{aligned}$$

Ce domaine est un cas particulier du domaine d'intégration considéré dans le cas des intégrales zêta :

Proposition 5.5.2
Nous avons : $\overline{N}_{pq} \cap NAH = \overline{n}_{pq}(D_{pq})$, où

$$D_{pq} = Q_p^{-1}([0,e_p[) = \{z \in V^{pq} : Q_p(z) \prec e_p\}.$$

A ce titre, D_{pq} est un ouvert borné convexe de V^{pq}.

Preuve. Nous invoquons une fois encore la caractérisation des NA-orbites en termes de Δ_i, ainsi que les formules du lemme **??** :

$$\begin{array}{rcl} \overline{n}_{pq}(z) \in NAH & \Leftrightarrow & \overline{n}_{pq}(z)e_{pq} \in NAe_{pq} \\ & \Leftrightarrow & \Delta_i(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})\Delta_i(e_{pq}) > 0, \forall i \in \{1,...,r\} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \Delta_i(e_p - Q_p(z)) > 0, \forall i \in \{1,...,p\} \\ \Delta_p(e_p - Q_p(z_{j+1} + ... + z_q)) > 0, \ \forall j \in \{1,...,q\} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \Delta_i(e_p - Q_p(z)) > 0, \forall i \in \{1,...,p\} \\ & \Leftrightarrow & e_p - Q_p(z) \in \Omega_p \\ & \Leftrightarrow & Q_p(z) \in] - \infty, e_p[\text{ dans } V_p. \end{array}$$

Nous avons notamment utilisé la notation $z_i \in W_i$, et pour la quatrième équivalence, le fait que $e_p - Q_p(z_{j+1} + ... + z_q) \succcurlyeq e_p - Q(z)$. Comme $Q_p(z) \in \overline{\Omega}$, la première partie de la proposition est démontrée. Il reste à prouver que D_{pq} est borné et convexe. Mais $\mathrm{tr}(Q_p(z)) = \frac{1}{2}\tau(z,z)$, de sorte que $Q_p(D_{pq})$ borné implique D_{pq} borné. Enfin, si z et z' sont dans D_{pq} et λ et μ sont deux réels positifs de somme 1,

$$\begin{array}{rcl} Q_p(\lambda z + \mu z') & = & \lambda^2 Q_p(z) + \mu^2 Q_p(z') + \lambda\mu(2e_p(2zz')) \\ & \prec & \lambda^2 Q_p(z) + \mu^2 Q_p(z') + \lambda\mu(Q_p(z) + Q_p(z')) \\ & \prec & (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu)e \\ & \prec & e. \end{array}$$

Donc $\lambda z + \mu z' \in D_{pq}$, qui est ainsi convexe. Nous avons utilisé :

$$Q_p(z) + Q_p(z') - 2e_p(2zz') = Q_p(z - z') \in \overline{\Omega}. \ \square$$

Le lemme suivant sera crucial dans les estimations qui permettent d'étudier l'intégrale définissant les fonctions sphériques :

Lemme 5.5.3
Soit C un compact de l'avenir strict de e_{pq} : $C \subset]e_{pq}, +\infty[$. Alors, il existe $\epsilon > 0$, qui dépend de C, tel que

$$\Delta_i(\overline{n}_{pq}(z)x) > \epsilon$$

pour tout $z \in \overline{D_{pq}}$, $x \in C$, et $i \in \{1,...,r\}$.

Preuve. tout $x \in C$ et $z \in \overline{D_{pq}}$ vérifient :

$$x \succ e_{pq} \Rightarrow \overline{n}_{pq}(z)x \succ \overline{n}_{pq}(z)e_{pq}.$$

Comme la projection $P(e_p)$ de $(V,\succcurlyeq)$ sur $(V_p,\succcurlyeq)$ est strictement croissante,

$$P(e_p)(\overline{n}_{pq}(z)x)\succ P(e_p)(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})=e_p-Q_p(z)\succcurlyeq 0.$$

On a prouvé que $P(e_p)\overline{n}_{pq}(z)x\succ 0$, donc appartient à Ω_p. Ainsi, $\Delta_i(\overline{n}_{pq}(z)x)>0$ pour tout $(z,x)\in\overline{D_{pq}}\times C$, et par compacité :

$$\epsilon:=\inf_{i\in\{1,\ldots,p\}(z,x)\in\overline{D_{pq}}\times C}\Delta_i(\overline{n}_{pq}(z)x)>0.$$

Ce qui prouve le lemme. $\square$

Démontrons à présent que D_{pq} est la réalisation bornée de l'espace symétrique

$$H_{pq}/H_{pq}\cap K.$$

Pour celà, donnons un paramétrage de H_{pq} analogue au cas du rang 1, qui va se déduire de résultats de trigonométrie hyperbolique : définissons classiquement sur V les fonctions

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{1}{2}\left(\exp x+\exp(-x)\right);\ \mathrm{sh}(x)=\frac{1}{2}\left(\exp x-\exp(-x)\right);\ \mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Elle satisfont :

$$(\mathrm{ch}x)^2-(\mathrm{sh}x)^2;\ \mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x=\exp x.$$

Proposition 5.5.4
La décomposition de Cartan de H_{pq} est : $H_{pq}=P(\exp V^{pq})H_{pq}\cap K$, où l'exponentielle est prise dans $(V,\cdot)$. L'espace symétrique $H_{pq}/H_{pq}\cap K$ se réalise donc comme $P(\exp V^{pq})$. Si $t\in V^{pq}$ notons $h_t=P(\exp(t))$. Alors,

$$h_t=\overline{n}_{pq}\left(tht\right)P\left(e_p\left(cht\right)^{-1}+e_q^*cht\right)n_{pq}\left(tht\right).$$

Ainsi, l'application $h_t\cdot H_{pq}\cap K\in H_{pq}/H_{pq}\cap K\mapsto tht\in D_{pq}$ est un difféomorphisme.

Preuve. La décompostion de Cartan résulte de la description de l'algèbre de Lie de H_{pq}, et de la décomposition de Cartan de G. Ensuite, il existe $z\in V^{pq}$ et $u\in V_p$ tels que

$$\begin{aligned}\exp t&=\mathrm{ch}t+\mathrm{sh}t\\&=\overline{n}_{pq}\left(z\right)\left(\mathrm{ch}t-u\right)\end{aligned}$$

d'après **??**. Sachant $\mathrm{ch}t \in V_p \oplus V_q^*$, nous déduisons

$$\begin{aligned} z &= 4\mathrm{sh}t \left(e_q^*\mathrm{ch}t\right)^{-1} \\ &= 4(e_q^*\mathrm{sh}t)\,(\mathrm{ch}t)^{-1} \\ &= 2\mathrm{sh}t(\mathrm{ch}t)^{-1} \\ &= 2\mathrm{th}t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}e_p((e_p(\mathrm{ch}t)z)z) \\ &= \frac{1}{4}e_p((z\mathrm{ch}t)z) \\ &= e_p(\mathrm{sh}t\mathrm{th}t). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'associativité de $\mathbb{R}[t]$,

$$\begin{aligned} (e_p\mathrm{ch}t)\cdot(e_p\mathrm{ch}t - u) &= e_p(\mathrm{ch}t)^2 - (e_p\mathrm{ch}t)(\mathrm{sh}t\mathrm{th}t) \\ &= e_p(\mathrm{ch}t)^2 - e_p(\mathrm{ch}t(\mathrm{sh}t\mathrm{th}t)) \\ &= e_p(\mathrm{ch}t)^2 - e_p(\mathrm{sh}t)^2 \\ &= e_p \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Considérons le parabolique maximal $P_{\max} = NA(K \cap H_{pq})$ et l'espace quotient associé $G/P_{\max}$, de point base $\mathbf{o}$. D'après la proposition précédente, on a égalité des orbites :

$$\mathcal{D}_{pq} = H\mathbf{o} = \overline{n}_{pq}(D_{pq})\mathbf{o},$$

et nous retrouvons :

Corollaire 5.5.5
Soit $\Gamma := (S_{pq}^{-1})^o$. L'inclusion suivante est vraie :

$$\Gamma \subset \left\{g \in G : g \cdot \overline{\mathcal{D}_{pq}} \subset \mathcal{D}_{pq}\right\}$$

Preuve. En effet, si $s \in (S_{pq})^o$, alors le lemme **??** impose $\Delta_i(\overline{n}_{pq}(z)s.e_{pq}) > \epsilon$ pour tout $i \in \{1,...,r\}$ et $z \in D_{pq}$. En conséquence, $\overline{n}_{pq}(\overline{D_{pq}})(S_{pq})^o \subset NAH$ et ainsi, $(S_{pq})^{o-1}\overline{n}_{pq}(\overline{D_{pq}}) \subset HAN$. En conséquence,

$$(S_{pq}^o)^{-1}\overline{n}_{pq}(\overline{D_{pq}})\mathbf{o} = \Gamma \cdot \overline{\mathcal{D}_{pq}} \subset HAN\mathbf{o} = H\mathbf{o} = \mathcal{D}_{pq}. \square$$

Chapitre 6

Analyse sur les espaces satellites.

6.1 Fonction c sur les satellites.

Commençons par exprimer le noyau de Poisson en termes d'algèbre de Jordan :

Proposition 6.1.1
Soit $g \in NAH_{pq}$. Alors :

$$a_H(g) = P\left(\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\Delta_i(ge_{pq})}{\Delta_{i-1}(ge_{pq})}\right|^{\frac{1}{2}} c_i\right),$$

avec la convention $\Delta_0 = 1$. Si $\mu \in \mathbb{C}^r$, $\lambda_\mu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et on a :

$$a_H^{\lambda_\mu}(g) = |\Delta|_\mu(ge_{pq}) := |\Delta_1(ge_{pq})|^{\mu_1-\mu_2}...|\Delta_{r-1}(ge_{pq})|^{\mu_{r-1}-\mu_r}|\Delta_r(ge_{pq})|^{\mu_r}.$$

Preuve. Soit $g = nah$ avec $n \in N$, $h \in H$ et $a = P(\sum_{i=1}^{r} a_i c_i)$ avec $a_i > 0$, $\forall i \in \{1,...,r\}$. Nous avons :

$$\Delta_i(ge_{pq}) = a_1^2...a_i^2\Delta_i(e_{pq}),$$

ce qui équivaut à la première partie de la proposition. Par ailleurs, en remarquant que

$$P\left(\sum_{i=1}^{r} a_i c_i\right) = \exp\left(2\sum_{i=1}^{r}\log(a_i)L(c_i)\right),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
a_H^{\lambda_\mu}(g) &= \exp\left(\lambda_\mu(\log a_H(g))\right) \\
&= \exp\left(\lambda_\mu\left(\sum_{i=1}^{r}\log\left|\frac{\Delta_i(g.e_{pq})}{\Delta_{i-1}(g.e_{pq})}\right| L(c_i)\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i\log\left|\frac{\Delta_i(g.e_{pq})}{\Delta_{i-1}(g.e_{pq})}\right|\right) \\
&= |\Delta|_\mu(ge_{pq}),
\end{aligned}$$

ce qui achève la proposition. □

Nous définissons donc la famille de fonction suivante associée à Ω_{pq}, pour $\lambda \in \mathbb{C}^r$:

$$\varphi_\lambda :]e_{pq}, +\infty[\to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_H |\Delta|_{\rho-\lambda}(hx)dh.$$

Cette définition coïncide avec celle des fonctions sphériques de paramètre λ_λ, l'espace ordonné Ω_{pq}, si l'on identifie S^o/H à $]e_{pq}, +\infty[= S^o e_{pq}$.

Dans le cadre satellite, la fonctions $c_{D_{pq}}$ se détermine aisément :

Théorème 6.1.2
L'intégrale définissant la fonction $c_{D_{pq}}(\lambda)$ est convergente si et seulement si :

$$2Re(\lambda_j - \lambda_i) < 2 - d, \qquad 1 \le i \le p < j \le r.$$

A cette condition, elle vaut :

$$c_{D_{pq}} = \prod_{1\le i\le p<j\le r} B\left(\lambda_i - \lambda_j - \frac{d}{2} + 1, \frac{d}{2}\right)$$

Preuve. Nous avons,

$$\begin{aligned}
c_{D_{pq}}(\lambda) &= \int_{z\in D_{pq}} \Delta_{\rho+\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})dz \\
&= \int_{Q(z)\in e-\Omega} \Delta_{\rho+\lambda}(\overline{n}_{pq}(z_1 + ... + z_i)e_{pq})dz \\
&= \int_{Q(z_2+...+z_q)\in e-\Omega}\left(\prod_{j=1}^{q-1}\Delta_{i+p}(e_{pq} - Q_p(z_{i+1} + ... + z_q))\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left[\int_{Q(z_1)\in e-Q(z_2+...+z_q)-\Omega}\Delta'_{\rho+\lambda}(e - Q_p(z))dz_1\right] dz_2...dz_r
\end{aligned}$$

où $\Delta'_\mu(x)$ est la fonction $\Delta_1(x)^{\mu_1-\mu_2}...\Delta_p(x)^{\mu_p-\mu_{p+1}}$. Nous avons évalué dans la proposition **??** l'intégrale I_1 entre crochets, et déterminé son domaine de convergence absolue : I_1 converge si et seulement si :

$$\mathrm{Re}(\lambda_k - \lambda_{p+1}) > \frac{d}{2} - 1, \forall k \in \{1,...,p\},$$

compte tenu du fait que $\rho_k - \rho_{p+1} = \frac{1}{2}d(k-p-1)$. L'intégrale I_1 vaut alors :

$$I_1 = \Delta_{\lambda+\rho+\frac{d}{2}}(e - Q(z_2 + ... + z_q))B_{\Omega_p}\left(\left(1 - \frac{d}{2} + \frac{d}{2}k + \lambda_k - \lambda_{p+1}\right)_{k=1}^{p}; \frac{d}{2}\right).$$

$c_{D_{pq}}$ s'écrit alors sous la forme du facteur Beta précédent, multiplié par

$$c'_{D_{pq-1}}(\lambda_1,...,\lambda_p,\lambda_{p+2},...,\lambda_r),$$

la fonction c de l'espace satellite de rang $p+q-1$, de signature $(p,q-1)$, et de même paramètre d, plongé dans

$$V' = V_p \oplus V(c_{p+2},...,c_r,1) \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_r.$$

En effet,

$$\rho' = \left(\rho_i + \frac{d}{2}\right)_{i\in\{1,...,r\}-\{p+1\}}$$

correspond à la demi-somme des racines du groupe G' correspondant. Par récurrence, on trouve le résultat recherché. $\square$

Remarque 6.1.1
Exprimons la formule **??** de [**?**], en termes d'algèbres de Jordan pour $a \in]e_{pq},\infty[\cap R$,

$$\varphi_\lambda(a) = \int_{D_{pq}}\left[\int_{K\cap H_{pq}} |\Delta|_{\rho-\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)ka\cdot e_{pq})dk\right]|\Delta|_{\rho+\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})dz,$$

le lemme **??** montre que sur tout compact C de $]e_{pq},\infty[\cap R$, la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \overline{D_{pq}} \times C & \to & \mathbb{C}, \\ (z,a) & \mapsto & \displaystyle\int_{K\cap H_{pq}} |\Delta|_{\rho-\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)ka\cdot e_{pq})dk \end{array}$$

est C^∞. En conséquence, l'intégrale converge absolument si

$$c_{D_{pq}}(\lambda) := \int_{D_{pq}} |\Delta|_{\rho+\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})dz$$

converge absolument.

6.2 Conjecture d'Ólafsson-Pasquale, cas satellite.

Nous allons, dans cette section, fournir des contre-exemples à la conjecture **??**, et démontrer la conjecture **??** dans le cadre des espaces satellites.

Commençons par prouver le lemme **??** :

Contre-exemple. Considérons un cône satellite du type Ω_{1q}, avec $q \geq 2$. Alors, dans ce cas particulier, la formule du lemme **??** donne :

$$\Delta_j(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})) = 1 - \sum_{i=j}^{r-1} ||z_i||^2,$$

et il suffit de prendre z_2 de norme 1, $z_3 = ... = z_r = 0$ et z_1 de norme 1. Comme $\det(\overline{n}_{pq}(z)) = 1$, le fait que Ω_{1q} soit réductif n'apporte aucun changement par rapport au cas semi-simple. Aussi ces identités sont-elles valables pour les lignes de niveau $|\det| = 1$. □

Pour la démonstration de la conjecture **??**, la stratégie consiste à utiliser une partie radiale des polynômes trouvés dans la section **??**, dans un système de coordonnées adaptées. Considérons à cet effet ce paramétrage d'un ouvert de Ω_{pq} :

Proposition 6.2.1
*Avec les notations du théorème **??**, définissons :*

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{pq} & : & V_q^+ \times (V_p^*)^+ \times D_{pq} \to \Omega_{pq}, \\ (u,v,z) & \mapsto & t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u)\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}, \end{array}$$

L'application Ψ_{pq} qui suit est un difféomorphisme, à valeurs dans un ouvert de Ω_{pq} et son Jacobien est de la forme :

$$\det(D_{(u,v,z)}\Psi_\varepsilon) = \left((-1)^{\dim V_q^* + \dim V^{pq}}\right) 2^r \prod_{k=1}^{p} u_k^{d(r-k)+1} \prod_{l=1}^{q} v_l^{d(r-l)+1}.$$

Preuve. Notons x_λ la composante suivant $V(e_p,\lambda)$ d'un élément x dans la décomposition de Peirce relative à l'idempotent e_p. Posons $x = t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u)\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}$. Notons h l'application de $V_p^+ \times V^{pq}$ dans V^{pq} qui associe à (u,z) l'élément $t_{V_p}(u)z$. D'après la formule **??**, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = t_{V_p}(u)\{e_p - Q_p(z)\} \\ x_{1/2} = -t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u)z \\ x_0 = -t_{V_q^*}(v)e_q^* \end{array} \right. ,$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = t_{V_p}(u)e_p - Q_p(h(u,z)) \\ x_{1/2} = -t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u)z \\ x_0 = -t_{V_q^*}(v)e_q^* \end{array}\right. .$$

Alors, si on note $J = (D_{(u,v,z)}\Psi_{pq})$ le jacobien recherché,

$$\begin{aligned} J &= \det\begin{pmatrix} D_u x_1 & D_z x_1 & D_v x_1 \\ D_u x_{1/2} & D_z x_{1/2} & D_v x_{1/2} \\ D_u x_0 & D_z x_0 & D_v x_0 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} D_u\left\{t_{V_p}(u)e_p - Q_p(h(\cdot,z))\right\} & -D_z\left\{Q_p(h(u,\cdot))\right\} & 0 \\ -t_{V_q^*}(v)D_u h(\cdot,z) & -t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u)D_z(z) & D_v x_{1/2} \\ 0 & 0 & -D_v\{t_{V_q^*}(v)e_q^*\} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} D_u\{t_{V_p}(u)e_p\} - D_u\left\{Q_p\circ h(\cdot,z)\right\} & D_z Q_p\circ h(u,\cdot) \\ t_{V_q^*}(v)D_u h(\cdot,z) & -t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u) \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot(-1)^{\dim V_q^*}\det(D_v\{t_{V_q^*}(v)e_q^*\}) \end{aligned}$$

Décomposons la matrice M du premier déterminant en un produit de deux matrices triangulaires par blocs (déterminant 1) et une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & \left\{D_{h(u,z)}Q_p\right\} t_{V_q^*}(v)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_u\{t_{V_p}(u)e_p\} & 0 \\ 0 & -t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u) \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_{V_p}(u)^{-1}D_u h(\cdot,z) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= -D_z\left\{Q_p\circ h(u,\cdot)\right\} \\ &= -\left\{D_{h(u,z)}Q_p\right\}\circ t_{V_p}(u) \\ &= \left\{D_{h(u,z)}Q_p\right\} t_{V_q^*}(v)^{-1}\circ\Big(-t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u)\Big) \\ M_{2,1} &= -t_{V_q^*}(v)D_u h(\cdot,z) \\ &= \Big(-t_{V_q^*}(v)t_{V_p}(u)\Big)\circ\left(t_{V_p}(u)^{-1}\right)D_u h(\cdot,z) \\ M_{1,1} &= D_u\{t_{V_p}(u)e_p\} - D_{h(u,z)}Q_p\circ D_u h(\cdot,z) \\ &= D_u\{t_{V_p}(u)e_p\} - D_{h(u,z)}Q_p\circ D_u h(\cdot,z) \\ &= D_u\{t_{V_p}(u)e_p\} + \{D_{h(u,z)}Q_p\}t_{V_q}(v)^{-1}\circ\left(-t_{Vq}(v)t_{V_p}(u)\right) \\ &\quad \circ\left(t_{V_p}(u)^{-1}D_u h(\cdot,z)\right) \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on utilise la formule des differentielles des composées, le fait que la differentielle d'une application linéaire est linéaire.

En conséquence, d'après le théorème **??**,

$$\begin{aligned}
J &= \det(M)\det(D_v\{t_{V_q^*}(v)e_q^*\})(-1)^{\dim V_q^*} \\
&= \det\begin{pmatrix} D_u\{t_{V_p}(u)e_p\} & 0 \\ 0 & -t_{V_p}(u)t_{V_q^*}(v)\end{pmatrix}\det(D_v\{t_{V_q^*}(v)e_q^*\})(-1)^{\dim V_q^*} \\
&= \det(D_u\{t_{V_p}(u)e_p\})\det(-t_{V_p}(u)t_{V_q^*}(v)|_{V^{pq}})\det(D_v\{t_{V_q^*}(v)e_q^*\})(-1)^{\dim V_q^*} \\
&= \det(D_u\{t_{V_p}(u)e_p\})\det(D_v\{t_{V_q^*}(v)e_q^*\})\prod_{j=1}^{p} u_j^{dq}\prod_{j=1}^{q} v_j^{dp}(-1)^{\dim V_q^*+\dim V^{pq}} \\
&= (-1)^{\dim V_q^*+\dim V^{pq}}2^r\prod_{k=1}^{p} u_k^{d(r-k)+1}\prod_{l=1}^{q} v_l^{d(r-l)+1}
\end{aligned}$$

ce qui donne l'énoncé. □

Le fait que z n'intervient pas dans le Jacobien précédent mène au résultat :

Corollaire 6.2.2
Soit $D(x,\partial)$ un opérateur différentiel sur V polynômial en x. Via le difféomorphisme Ψ_{pq}, il lui correspond un opérateur différentiel $D'(u,v,z,\partial')$ sur $V_q^+\times(V_p^*)^+\times D_{pq}$, défini par :

$$D'(u,v,z,\partial')\{f\circ\Psi_{pq}\} = (D(x,\partial)f)\circ\Psi_{pq}.$$

Alors cet opérateur $D'(u,v,z,\partial)$ est polynômial en la variable z.

Preuve. Comme les coordonnées de $x\in V$ sont polynômiales en les variables u,v,z, l'inverse de la matrice jacobienne, aura pour coefficients des fractions rationnelles, avec comme dénominateurs des diviseurs du déterminant jacobien : c'est une conséquence de la formule d'inversion des matrices à l'aide des cofacteurs. Mais ce jacobien ne fait pas intervenir la variable z, ainsi, les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne sont polynômiaux en z. En conséquence, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \sum c(u,v,z)\frac{\partial}{\partial a}$$

où $a = u_i,v_k$ ou z_{ij} et c est polynômial en z.

Comme les coordonnées de x et les coefficients de l'inverse de la jacobienne sont polynômiaux en z, à tout opérateur différentiel polynômial en

x sur V correspond un opérateur polynômial en z (et rationnel en u,v) sur $V_q^+ \times (V_p^*)^+ \times D_{pq}$. □

L'énoncé suivant généralise le théorème 3.6 page 259 de [**?**]. Le théorème figurant dans le livre d'Helgason démontre l'existence d'une partie radiale pour les fonctions invariantes sous l'action d'un groupe de Lie. Il s'étend sans difficulté au cas des fonctions relativement invariantes.

Théorème 6.2.3
Soit V une variété réelle C^∞ et dénombrable à l'infini. Supposons qu'un groupe de Lie H agit sur V, de sorte que l'axiome suivant de transversalité soit satisfait par une sous-variété W de V :

$$T_w V = (H \cdot w)_w \oplus T_w W,\ \forall w \in W.$$

Soit χ un caractère de H. Soit D un opérateur différentiel sur V. Alors il existe un unique opérateur $\Delta_\chi(D)$ sur W tel que :

$$(Df)|_W = \Delta_\chi(D)\,\{\,f|_W\}\,,$$

pour toute fonction relativement invariante par rapport à χ ($f(hx) = \chi(h)f(x)$) sur un ouvert de V.

Preuve. Elle est identitique à la démonstration d'Helgason, à ceci près qu'on reconstruit une fonction de $C^\infty(V_0)$ à l'aide de $\phi \in C^\infty(W_0)$ en posant :

$$f(h \cdot x) = \chi(h)\phi(x), \forall x \in W_0, \forall h \in H,$$

où W_0 est un ouvert de W et V_0 est l'ouvert $H \cdot W_0$. □

Théorème 6.2.4
Il existe un opérateur différentiel $D(z,\alpha,\partial)$ sur D_{pq}, polynômial en toutes ses variables, et un polynôme $b \in \mathbb{C}[\alpha]$, tels que :

$$D(z,\alpha,\partial)\Delta^\alpha(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}) = b(\alpha)\Delta^{\alpha-\mathbb{1}_p}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}),$$

pour tout $z \in V^{pq}$. En outre, le plus grand commun diviseur des polynômes b qui satisfont cette relation est

$$\widetilde{b}_p(\alpha) = \prod_{1\le i\le p\le j\le r-1} \left(\alpha_i + ... + \alpha_j + (j-i)\frac{d}{2}\right).$$

Preuve. Considérons le caractère χ_α défini pour $g \in N_p A_p \times N_q^* A_q^*$, par la formule :

$$\chi_\alpha(g)\Delta^\alpha(x) = \Delta^\alpha(gx).$$

Soit $E(\alpha,x,\partial)$ un opérateur différentiel sur V, polynômial en toutes ses variables, qui satisfait à

$$E(\alpha,x,\partial)\Delta^\alpha(x) = b(\alpha)\Delta^{\alpha-\mathbf{1}_p+k\mathbf{1}_r}(x).$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

Notons que la partie radiale $\Delta_{\chi_\alpha}(E(\alpha,x,\partial))$ est encore polynômial en α. En effet, l'opérateur $E(\alpha,x,\partial)$ exprimé dans les coordonnées (u,v,z), appliqué à une fonction du type $\chi_\alpha(t_{V_p}(u)t_{V_q^*}(v))f(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})$, va donner une combinaison de caractères qui dépendent de α, de polynômes en α, et de dérivées de $f(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})$. En évaluant en $t_{V_p}(u)t_{V_q^*}(v) = 1$, les caractères seront remplacés par 1, si bien que l'on obtiendra une combinaison de polynômes en α et de dérivées de $f(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})$.

En vertu des deux résultats précédents, et du fait que $\Delta_r(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}) = 1$, sa partie radiale $\Delta_{\chi_\alpha}(E(\alpha,x,\partial))$ vérifie :

$$\Delta_{\chi_\alpha}(E(\alpha,x,\partial))\Delta^\alpha(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}) = b(\alpha)\Delta^{\alpha-\mathbf{1}_p}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq}).$$

Le plus grand commun diviseur de ses polynômes divise le plus grand commun diviseur des polynômes $B_+(\alpha)$ et $B_-(\alpha)$ correspondant à $E_+(\alpha,x)$ et $E_-(\alpha,x)$, les deux exemples développés dans la section **??**. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_+(\alpha + k\mathbf{1}_r,x) \circ \Delta_r(x)^k$ et $E_-(\alpha + k\mathbf{1}_r,x) \circ \Delta_r(x)^k$ satisfont également les équations précédentes. Pour tout $k > 0$, les polynômes associés $B_+(\alpha + k\mathbf{1}_r)$ et $B_-(\alpha + k\mathbf{1}_r)$, n'ont comme facteur commun à $B_+(\alpha)$ et $B_-(\alpha)$ que le polynôme

$$\widetilde{b}_p(\alpha) = \prod_{1\leq i\leq p\leq j\leq r-1}\left(\alpha_i + ... + \alpha_j + (j-i)\frac{d}{2}\right).$$

Ainsi, ce polynôme est divisé par le plus grand commun diviseur des b satisfaisant l'équation de n'énoncé. Pour conclure, notons qu'en corollaire de la proposition 5.1 de [**?**], les auteurs prouvent en utilisant la fonction c que $\widetilde{b}_k(\alpha)$ divise tout b satisfaisant la relation de l'énoncé. Dans cette proposition, la forme particulière du décalage δ n'intervient pas, de sorte qu'elle reste valable avec le δ de la conjecture rectifiée. Cela permet de conclure. □

Exemple. Considérons la cas particulier des satellites du type Ω_{21}. Nous avons :

$$b_2(\alpha) = \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 + d/2) = \widetilde{b}_2(\alpha)$$

Ainsi, la conjecture **??**, plus forte que la conjecture **??**, est vérifiée pour les espaces ordonnés provenant des paires symétriques :

$$(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}),\mathfrak{so}(2,1));\,(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}),\mathfrak{su}(2,1));\,(\mathfrak{su}^*(6),\mathfrak{sp}(2,1));\,(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{f}_{4(-20)}).\ \square$$

Pour les intégrales zêta, nous avons vérifié que dès le rang 3, les opérateurs D_k ne pouvaient seuls servir à construire un éventuel opérateur dont le polynôme associé serait le plus grand commun diviseur $\widetilde{B}_k$. Ici, le même phénomène ne se produit qu'à partir du rang 4, puisque le déterminant ne joue aucun rôle, cela explique l'occurence de l'exemple précédent, mais ne laisse aucun espoir quand à sa généralisation à l'aide seulement des D_k.

Signalons enfin le résultat suivant, qui est une application majeure des identités de Bernstein sur les espaces symétriques ordonnés :

Théorème 6.2.5
Pour tout $a \in S^o \cap A$, la fonctions $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(a)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}^r$, avec des pôles simples situés dans l'ensemble des pôles du numérateur de la fonction c_D. C'est-à-dire :

$$\lambda \mapsto \prod_{1\leq i\leq p<j\leq r-1} \frac{1}{\Gamma\left(\lambda_i-\lambda_j+1\right)}\varphi_\lambda(a)$$

se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^r$.

Preuve. D'après la remarque **??**, sur tout compact C de $]e_{pq},\infty[\cap R$, la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \overline{D_{pq}}\times C & \to & \mathbb{C}, \\ (z,a) & \mapsto & \displaystyle\int_{K\cap H_{pq}} |\Delta|_{\rho-\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)ka\cdot e_{pq})dk \end{array}$$

est C^∞. Ainsi, si un opérateur $D(\lambda,z,\partial)$ polynômial en toutes ses variables satisfait l'identité de Bernstein du théorème **??**,pour le polynôme b, nous avons :

$$\begin{aligned}
b(\rho+\lambda)\varphi_\lambda(a) &= b(\rho+\lambda)\int_{D_{pq}}\left[\int_{K\cap H_{pq}}|\Delta|_{\rho-\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)ka\cdot e_{pq})dk\right] \\
&\quad \cdot|\Delta|_{\rho+\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})dz, \\
&= \int_{D_{pq}}\left[\int_{K\cap H_{pq}}|\Delta|_{\rho-\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)ka\cdot e_{pq})dk\right] \\
&\quad \cdot D(\lambda+\rho,z,\partial)|\Delta|_{\rho+\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})dz \\
&= \int_{D_{pq}}\left[D^*(\lambda+\rho,z,\partial)\int_{K\cap H_{pq}}|\Delta|_{\rho-\lambda}(\overline{n}_{pq}(z)ka\cdot e_{pq})dk\right] \\
&\quad \cdot|\Delta|_{\rho+\lambda-\delta}(\overline{n}_{pq}(z)e_{pq})dz
\end{aligned}$$

L'intégrale de droite converge en même temps que $c_D(\rho+\lambda-\delta)$. Des itérations succéssives conduisent au prolongement méromorphe à $\mathbb{C}^r$. En outre, les pôles potentiels sont situés dans les translatés des zéros du polynôme b. En appliquant ce procédé à plusieurs couples d'opérateurs et de polynômes, tels que le plus grand commun diviseur des polynômes soit

$$\widetilde{b}_p(\lambda_1+\rho_1-\lambda_2-\rho_2,\dots,\lambda_{r-1}+\rho_{r-1}-\lambda_r-\rho_r,\lambda_r+\rho_r)=\prod_{1\le i\le p<j\le r-1}(\lambda_i-\lambda_j)\,,$$

nous démontrons le théorème. □

6.3 Retour aux identités globales.

Nous disposons maintenant du matériel pour démontrer le théorème **??**, qui affirme que le polynôme

$$\widetilde{B}_k(\alpha)=\prod_{1\le i\le k\le j\le r}\left(\alpha_i+\dots+\alpha_j+(j-i)\frac{d}{2}\right)$$

est en fait le plus grand commun diviseur de tous les B_k vérifiant l'identité de Bernstein **??**.

Preuve. Donnons nous un couple (D_k,B_k) satisfaisant l'identité de Bernstein. Nous allons montrer que $\widetilde{B}_k$ divise B_k. En passant aux parties radiales, d'après le théorème **??**, nous savons que le polynôme

$$\widetilde{b}_k(\alpha)=\prod_{1\le i\le k\le j\le r-1}\left(\alpha_i+\dots+\alpha_j+(j-i)\frac{d}{2}\right)$$

divise le polynôme B_k. Il reste donc à prouver que

$$d_k(\alpha) = \prod_{i=1}^{r} \left(\alpha_i + ... + \alpha_r + (r-i)\frac{d}{2} \right)$$

divise B_k. Considérons la distribution $D_k(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r)R_{\mathbf{s}(\alpha)}$, où R désigne les distributions de Riesz sur le cône convexe, définies par la formule **??**, et où $\mathbf{s}(\alpha)$ est le paramètre de $\mathbb{C}^r$ tel que $\Delta_{\mathbf{s}(\alpha)} = \Delta^\alpha$. Nous avons alors :

$$D_k\left(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right) R_{\mathbf{s}(\alpha)} = B_k\left(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right) \frac{\Gamma_\Omega(s(\alpha - \mathbf{1}_k))}{\Gamma_\Omega(s(\alpha))} R_{\mathbf{s}(\alpha-\mathbf{1}_k)}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_\Omega(s(\alpha - \mathbf{1}_k))}{\Gamma_\Omega(s(\alpha))} &= \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma(\alpha_j + ... + \alpha_r - 1 - (j-1)\frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha_j + ... + \alpha_r - (j-1)\frac{d}{2})} \\ &= \prod_{j=1}^{r} \left(\alpha_j + ... + \alpha_r - (j-1)\frac{d}{2} - 1 - \frac{n}{r} + 1 + (r-1)\frac{d}{2} \right)^{-1} \\ &= d_k\left(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Mais dans la formule **??**, le membre de gauche est holomorphe, et dans le membre de droite, la distribution $R_{\mathbf{s}(\alpha-\mathbf{1}_k)}$ n'est identitquement nulle pour aucun α, et est holomorphe. Donc,

$$\frac{B_k\left(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right)}{d_k\left(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right)}$$

est holomorphe et par conséquent, le polynôme $d_k\left(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right)$ divise $B_k\left(\alpha - \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right)$. Ainsi, on a prouvé que $\widetilde{B}_k(\alpha)$ est un diviseur commun de tous les B_k satisfaisant l'identité de Bernstein. Par ailleurs, dans la section **??**, nous avons exhibé deux opérateurs dont le plus grand commun diviseur était $\widetilde{B}_k(\alpha)$. Nous en déduisons le théorème.

Algèbres de Jordan simples euclidiennes.

V	rang	d	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}_{pq}$	$\mathfrak{k}$	dimV
$Sym(r,\mathbb{R})$	r	1	$\mathfrak{sl}(r,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{so}(p,q)$	$\mathfrak{so}(r)$	$\frac{1}{2}m(m+1)$
$Herm(r,\mathbb{C})$	r	2	$\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{su}(r)$	m^2
$Herm(r,\mathbb{H})$	r	4	$\mathfrak{su}^*(2r) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{sp}(p,q)$	$\mathfrak{sp}(r)$	$m(2m+1)$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$	2	n-2	$\mathfrak{o}(n-1,1) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{o}(n-2,1)$	$\mathfrak{o}(n-1)$	n
$Herm(r,\mathbb{O})$	3	8	$\mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	$\mathfrak{f}_4$	27

Espaces symétriques ordonnés simples ou complexes simples.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	Remarque
$\mathfrak{so}(p+1,1)$	$\mathfrak{so}(p,1)$	s,H
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p,q)$	s
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(p,q)$	s,$\mathbb{C}$
$\mathfrak{su}^*(2p+2q)$	$\mathfrak{sp}(p,q)$	s
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	s
$\mathfrak{so}(p+1,2)$	$\mathfrak{so}(p+1,1)\oplus\mathbb{R}$	c,H
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}$	c
$\mathfrak{su}(n,n)$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathbb{R}$	c
$\mathfrak{so}^*(4n)$	$\mathfrak{su}^*(2n)\oplus\mathbb{R}$	c
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6(-26)}\oplus\mathbb{R}$	c
$\mathfrak{so}(p+1,q+1)$	$\mathfrak{so}(p+1,1)\oplus\mathfrak{so}(1,1+q)$	H, $q>1,p>1$
$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$	
$\mathfrak{sp}(n,n)$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sp}(2,2)$	
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{su}^*(8)$	
$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathbb{C}$
$\mathfrak{so}(n+2,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2,n)$	$\mathbb{C}$
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathbb{C}$
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathbb{C}$
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathbb{C}$

Les symboles en remarque ont la signification suivante : $\mathbb{C}$ implique que l'algèbre $\mathfrak{g}$ n'est pas simple (au sens réel) mais est muni d'une structure complexe, H signifie qu'il s'agit d'un espace hyperbolique (de rang 1), c caractérise les espaces de type Cayley (qui ont à la fois une structure d'espace ordonné et d'espace "compactement causal" : $H\cap K$ a des points fixes non nulles dans $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$). Enfin, le s distingue les parties semi-simples d'espaces satellites, c'est-à-dire les lignes de niveaux $|\det|=1$ dans les satellites.

Bibliographie

[1] N. B. Andersen, *Paley-Wiener Theorems for hyperbolic spaces*, Journ. of Func. Anal. **179** (2001) 66-119.

[2] N. B. Andersen - G. Ólafsson - H. Schlichtkrull, *On the inversion of the Laplace and Abel transforms on causal symmetric spaces*, preprint.

[3] N. Bernstein - I. Gelfand, *Meromorphic property of the functions* P^l, Func. Anal. Appl. **3** (1969) 68-69.

[4] W. Bertram, *The geometry of Jordan and Lie structures*, lecture notes in math. **1754** Springer-Verlag (2000).

[5] B. Blind, *Analyse de Fourier sur une algèbre de Jordan*, Thèse, (1991).

[6] N. Bopp - H. Rubenthaler, *Fonction zêta associée à la série principale de certains espaces symétriques.*

[7] J.L Clerc, *Zeta distribution associated to a representation of Jordan algebra*, preprint (1999).

[8] J.L Clerc, *Représentation d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel*, J. reine. angew. Math **423** (1992), 41-71.

[9] J. Faraut, *Fonctions de Legendre sur une algèbre de Jordan*, CWI Quarterly **5** (1992), 309-320.

[10] J. Faraut, *Fonctions sphériques sur un espace symétrique ordonné de type Cayley*, Contem. Math. **191** (1991), 41-55.

[11] J. Faraut - J. Hilgert - G. Ólafsson, *Spherical functions on ordered symmetric spaces*, Ann. Inst. Fourrier **44** (1994), 927-966.

[12] J. Faraut - A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford science publications (1994).

[13] J. Faraut - I. Satake, *The functional equation of Zeta distributions associated with formally real Jordan algebras*, Tôhoku Math. Journ. **36** (1984) 469-482.

[14] P. Grackzyk, *Function c on an ordered symmetric space*, Bull. Sci. Math. **121** (1997), 561-572.

[15] S. Helgason, *Groups and geometric analysis : integral geometry, invariant differential operators and spherical functions*, Academic Press, San Diego, 1984.

[16] J. Hilgert - K.H. Neeb, *Vector valued Riesz Distributions on Euclidian Jordan Algebras.* preprint.

[17] J. Hilgert - G. Ólafsson, *Causal symmetric spaces, geometry and harmonic analysis*, Perspective in mathematics **18**, Academic Press, San diego, 1997.

[18] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Birkhäuser, Boston (1996).

[19] M. Koecher, *Jordan algebra and their applications*, lecture notes, Univ. of Minnesota, (1962).

[20] B. Krötz - G. Ólafsson, *The c-function for non-compactly causal symmetric spaces*, preprint (2000).

[21] M. Lassalle, *Algèbre de Jordan et ensemble de Wallach*, Invent. Math. **89** (1987), 375-393.

[22] O. Loos, *Symmetric spaces I*, Benjamin (1969).

[23] G. Ólafsson, *Fourier and Poisson tranformation associated to a semisimple symmetric space*, Invent. Math. **90** (1987) 605-629.

[24] G. Ólafsson, *Spherical functions and spherical Laplace transform on ordered symmetric space.* preprint.

[25] G. Ólafsson - A. Pasquale, *On the meromorphic extension of the spherical functions on noncompactly causal symmetric spaces*, Journ. of Func. Anal. **181** (2001) 346-401.

[26] T. Oshima - J.Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric spaces*, Inv. Math. **57** (1980).

[27] H. Rubenthaler, *Algèbres de Lie et espaces préhomogènes*, Travaux en cours 44, Hermann, (1992).

[28] C. Sabbah, *Proximité évanescente II*, Compositio Math. **64** (1987), 213-241.

[29] I. Satake, *A formula in simple Jordan algebras*, Tôhoku. Math. Journ. **36** (1984), 611-622.

[30] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogenous vector spaces I : Functional equations*, Tohoku Math. J., **34** (1982), 437-483.

[31] M. Sato - T.Shintani, *On Zeta functions associated with prehomogenous vector spaces*, Ann. of Math. **100** (1974) 131-170.